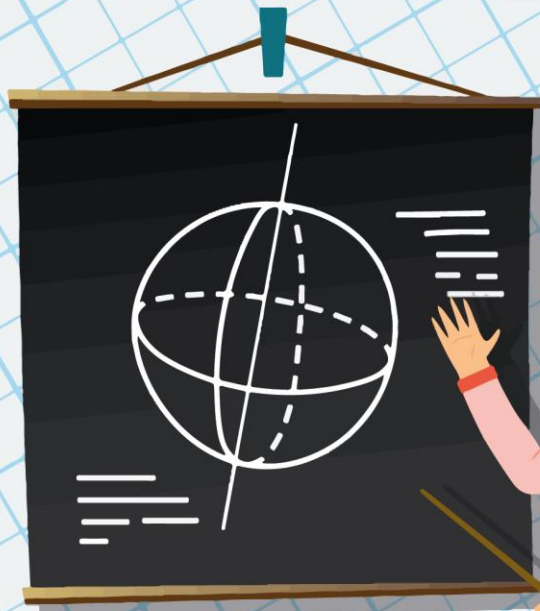


ریاضی و آمار دهم

منوچه دوم

(نمونه سوالات حل شده)



(تمامی حقوق متعلق به مجتمع
آموزشی و پژوهشی ثمین می باشد.)

فصل اول : معادله درجه دوم

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

۱- پدر نیکی از ۴ برابر سن او ۶ سال بزرگتر است و ۴۶ سال دارد، نیکی چند ساله است؟

پاسخ:

سن نیکی را نمی دانیم و مورد پرسش مسئله است آن را X در نظر می گیریم و معادله‌ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\text{سن پدر نیکی} = \underbrace{4 \times (\text{سن نیکی})}_{\downarrow} + 6$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 هست 4 برابر سن نیکی 6 سال بزرگتر

بنابراین داریم:

$$46 = (4 \times x) + 6$$

$$46 - 6 = 4x$$

$$40 = 4x$$

$$\boxed{x = 10}$$

۲- عدد b از ۶ برابر عدد a ، ۳ واحد کم تر است و $b - a = 12$ ، عدد کوچکتر چند

است؟

پاسخ:

باید معادله ای برای صورت سؤال تشکیل دهیم:

$$b \text{ عدد} = \underbrace{6 \times a} - 3$$

↓ ↓

سه واحد کم تر شش برابر a هست

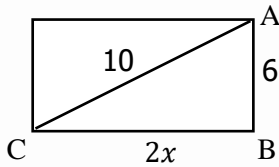
از طرفی:

$$b - a = 12 \Rightarrow b = 12 + a$$

بنابراین با جایگذاری معادل b در معادله ی اول داریم:

$$12 + a = 6a - 3 \Rightarrow 12 + 3 = 6a - a \Rightarrow 15 = 5a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

۳- محیط مستطیل زیر را بدست آورید:



پاسخ

: فرمول محیط مستطیل: (عرض + طول) ۲

پس بایستی طول و عرض مستطیل داده شده را پیدا کنیم:

در مثلث ABC رابطه ی فیثاغورس را می نویسیم تا x پیدا شود:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$(6)^2 + (2x)^2 = 100$$

$$36 + 4x^2 = 100$$

$$4x^2 = 100 - 36$$

$$4x^2 = 64$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$



برای طول فقط مقادیر مثبت قابل قبول هستند یعنی $x = 4$.

طول مستطیل $2x$ است:

$$\text{طول مستطیل} = 2x = 2 \times 4 = 8$$

محیط مستطیل:

$$2(\text{عرض} + \text{طول}) = 2(8 + 6) = 28$$

۴- دانش آموزی با ثلث پولش کتاب و $\frac{1}{6}$ از باقی مانده ی پولش دفتر خرید و در نهایت

۱۰۰۰۰ تومان از پولش باقی ماند، او چه مقدار از پولش را برای خرید کتاب هزینه کرده

است؟

پاسخ:

فرض می کنیم این دانش آموز x تومان پول دارد، در این صورت او با $\frac{1}{3} \times x$ کتاب خریده

است. با $\frac{1}{4}$ از باقی مانده ی $\frac{1}{3}x$ ، یعنی با $\frac{1}{4}$ از $\frac{2}{3}x$ که می شود $\frac{2}{3}x \times \frac{1}{4} = \frac{x}{6}$ دفتر خریده

است:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = \frac{2x + x}{6} = \frac{1}{2}x$$

از آنجایی که $\frac{x}{2}$ باقی مانده ی پولش $10000/10$ تومان است بنابراین کل پول او $20000/20$

تومان بوده است و $\frac{1}{3}$ از 20000 تومان را صرف خرید کتاب کرده است:

$$x \times \frac{1}{3} = \frac{20000}{3}$$

۵- اگر ثلث عددی با $\frac{1}{4}$ عدد دیگر مساوی باشد و حاصل جمع ۴ برابر عدد اول با نصف عدد دوم ۴۲ باشد. اختلاف این دو عدد چند است؟

پاسخ:

اسم عدد مجهول اول را x و اسم عدد مجهول دوم را y می گذاریم و اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y \Rightarrow 4x = 3y \quad (*)$$

$$4x + \frac{y}{2} = 42 \quad (**)$$

با جاگذاری (*) در (**): داریم:

$$3y + \frac{y}{2} = 42$$

طرفین تساوی را در عدد دو ضرب می کنیم تا از مخرج y خلاص شویم:

$$(3y + \frac{y}{2} = 42) \times 2$$

$$6y + y = 84 \Rightarrow 7y = 84 \quad y = \frac{84}{7} = 12$$

$$4x = 3y \rightarrow x = \frac{3}{4} \times y \xrightarrow{y=12} x = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

$x = 9$ و $y = 12$ است یعنی اختلاف x و y سه واحد است.

۶- ثلث ظرفی پر از آب است اگر $5/1$ لیتر دیگر آب به آن اضافه کنیم $\frac{1}{4}$ ظرف خالی می ماند. این ظرف چند لیتر گنجایش دارد؟

پاسخ:

گنجایش ظرف را x در نظر می گیریم می دانیم $\frac{1}{3}x$ پر از آب است و با افزودن $\frac{3}{2}$ لیتر به آن، $\frac{3}{4}x$ ظرف پر می شود (زیرا در صورت سؤال گفته شده است که با افزودن $\frac{3}{2}$ لیتر، $\frac{1}{4}$ ظرف خالی می ماند).

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}x$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$$

طرفین تساوی را در عدد ۱۲ (کوچکترین مضرب مشترک ۳، ۴، ۲) ضرب می کنیم تا از شر مخرج کسرها خلاص شویم.

$$\left(\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x\right) \times 12$$

$$18 = 9x - 4x \Rightarrow 18 = 5x \quad x = \frac{18}{5} = \frac{36}{10} = 3\frac{3}{5} \text{ لیتر}$$

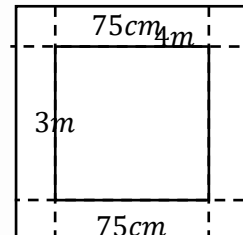
۷- طول و عرض فرش به ترتیب ۳ و ۴ متر است و اضلاع فرش هر کدام از دیواره ها ۷۵ سانتی متر فاصله دارند، مساحت اتاق چند برابر مساحت فرش است؟

پاسخ:

ابتدا یک شکل برای مسئله می کشیم، شکل ها به درک بهتر ما از سوال کمک می کنند، همان طور که از شکل پیداست طول و عرض اتاق $5/1$ متر از طول و عرض فرش بزرگتر است بنابراین:

$$\text{طول اتاق} = \text{طول فرش} + 1/5 = 4 + 1/5 = 5/5$$

$$\text{عرض اتاق} = \text{عرض فرش} + 1/5 = 3 + 1/5 = 4/5$$



سؤال مساحت اتاق به مساحت فرش را از ما خواسته است:

$$\frac{\text{عرض اتاق} \times \text{طول اتاق}}{\text{عرض فرش} \times \text{طول فرش}} = \frac{5/5 \times 4/5}{4 \times 3}$$

۸- فرض کنید x تومان پول دارید اگر با این پول ۵ شمع بخرید ۷۰۰۰ تومان پول اضافی و اگر ۱۰ شمع بخرید ۵۰۰۰ تومان پول کم می آورید. پول شما چقدر است؟

پاسخ:

قیمت شمع را نمی دانیم بنابراین آن را با نماد y نشان می دهیم.

آن طور که از صورت سؤال پیداست پول شما به اندازه ای است که می توانید ۵ شمع بخرید و باز ۷۰۰۰ تومان داشته باشید یعنی پول شما ۷۰۰۰ تومان از پول ۵ شمع بیشتر است:

$$x = 5y + 7000$$

ولی پول شما به خرید ده عدد شمع نمی رسد در واقع پول شما از هزینه خرید ۱۰ شمع، ۵۰۰۰ تومان کم تر است:

$$x = 10y - 5000$$

حال دو معادله داریم و دو مجهول، دستگاه را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x = 5y + 7000 \\ x = 10y - 5000 \end{cases} \rightarrow 5y + 7000 = 10y - 5000$$

$$7000 + 5000 = 10y - 5y$$

$$12000 = 5y \Rightarrow y = \frac{12000}{5} = 2400$$

در نتیجه:

$$x = 10(2400) - 5000 = 24000 - 5000 = 19000$$

۹- به چند طریق می توانیم یک اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی را با اسکناس های ۵۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۱۰۰۰ تومانی خورد کنیم؟

پاسخ:

یکی از راه های حل مسئله کشیدن جدول و نظم بخشیدن به اطلاعات است:

تعداد حالات	حالاتی که با آن می توان ۱۰/۰۰۰ تومان را خورد کرد	تعداد اسکناس ۵/۰۰۰ تومانی
۶	(۱۰ تا ۱۰۰۰ تومانی) یا (۲ تا ۱۰۰۰ تومانی و ۴ تا ۲۰۰۰ تومانی) یا (۴ تا هزار تومانی و ۳ تا ۲۰۰۰ تومانی) یا (۶ تا هزار تومانی و ۲ تا ۲۰۰۰ تومانی) یا (۸ تا ۱۰۰۰ ای و یک ۲۰۰۰ ای) یا (۵ تا ۲۰۰۰ تومانی)	۰
۳	(۵ تا ۱۰۰۰ تومانی) یا (۳ تا ۱۰۰۰ ای و یک ۲۰۰۰ تومانی) یا (۲ تا ۲۰۰۰ تومانی و یک ۱۰۰۰ ای)	۱
۱	(۲ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی)	۲

تعداد کل حالات: $3+6+1=10$

۱۰- عبارت جبری مربوط به عملیات زیر را بنویسید:

عددی را انتخاب می کنیم و عدد ۷ جمع می کنیم و حاصل را ۷ برابر می کنیم و بعد نصف

می کنیم و سپس ثلث عددی را که انتخاب کرده بودیم را از این حاصل کم می کنیم.

پاسخ:

عدد انتخاب شده را x نام گذاری می کنیم:

$$\frac{7(x + 7)}{2} - \frac{x}{3}$$

۱۱- طرف دوم اتحادهای داده شده را تکمیل کنید.

(آ)

$$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + \square + 16y^2$$

(ب)

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 + \square$$

(ج)

$$(y + 2)(y - x) = y^2 + \square y - 2x$$

پاسخ:

(آ) مثالی از اتحاد مربع دو جمله ای است:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

که در آن $a = 3x$ و $b = 4y$ است بنابراین:

$$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

یعنی جای خالی را باید با $2 \times a \times b$ که همان $2 \times 3x \times 4y = 24xy$ است پر کنیم.

(ب) مثالی از اتحاد مزدوج است:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

که در آن $a = x$ و $b = 7$ است بنابراین:

$$(x - 7)(x - 7) = x^2 - 49$$

بنابراین جای خالی را باید با $-b^2$ یعنی $-49 = -(7)^2$ پر کنیم.

(ج) مثالی از اتحاد جمله مشترک است:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \underbrace{(a + b)}_{\text{جمع غیر مشترکها}} x + \underbrace{ab}_{\text{ضرب غیر مشترکها}}$$

که در آن $x = y$ و $a = 2$ و $b = -x$ است بنابراین:

$$(y + 2)(y - x) = y^2 + (2 - x)y - 2x$$

در نتیجه جای خالی را بایستی با $(2 - x)$ پر کنیم.

هر یک از الف، ب و ج را می توانستیم با ضرب جمله به جمله نیز به راحتی محاسبه کنیم،
مثلا در ج:

$$(y + 2)(y - x) = y^2 - xy + 2y - 2x = y^2 + y(2 - x) - 2x$$

که ضریب y ، باز هم $(2 - x)$ می باشد.

اما دلیلی که از اتحادها استفاده می کنیم سرعت بخشیدن به محاسبات و جلوگیری از محاسبات اضافی است.



۱۲- حاصل عبارت $(101)^2 - (99)^2$ را بیابید.

پاسخ:

صورت این سؤال باید ما را یاد اتحاد مزدوج بیاندازد:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

بنابراین داریم:

$$(101)^2 - (99)^2 = (101 - 99)(101 + 99) = (2)(200) = 400$$

۱۳- فرض کنید $b^2 - a^2 = 16$ باشد و $a + b = 8$ باشد، a و b را بیابید.

پاسخ:

$b^2 - a^2$ ما را یاد اتحاد مزدوج می اندازد:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 16 (*)$$

از طرفی می دانیم طبق صورت سؤال $a + b = 8$ است، بنابراین:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(8) = 16 \Rightarrow b - a = 2$$

حال کفایت دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را حل کنیم تا a و b پیدا شوند:

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow \boxed{b = 5}, \boxed{a = 3}$$

۱۴- فرض کنید $(2x + \frac{1}{5x}) = 7$ باشد، آن گاه $(4x^2 + \frac{1}{25x^2})$ چقدر است؟

پاسخ:

ما را یاد اتحاد مربع دو جمله ای می اندازد که ناقص است و جمله ای که

مربوط به حاصل ضرب دو برابر جمله ی اولی در جمله ی دوم می شود را ندارد یعنی:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

که در آن $a = 2x$ و $b = \frac{1}{5x}$ است.

$$4x^2 + \frac{1}{25x^2} = (2x + \frac{1}{5x})^2 - 2(2x \times \frac{1}{5x})$$

$$4x^2 + \frac{1}{25x^2} = (7)^2 - 2\left(2 \frac{2}{5}\right) = 49 - \frac{4}{5} = \frac{241}{5}$$

۱۵- حاصل جمع اعداد x و y و z برابر است با عدد ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دو به دو آن ها برابر است با ۳۰، مجموع مربعات این اعداد را بیابید.

پاسخ:

$$x + y + z = 11 \quad , \quad xy + xz + yz = 30$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ?$$

این معلومات ما را یاد اتحاد مربع سه جمله ای می اندازد:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

که در آن مقدار $a + b + c$ را داریم همین طور مقدار $ab + ac + bc$ را نیز داریم:

$$(11)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(30)$$

$$121 = x^2 + y^2 + z^2 + 60 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 61$$

۱۶- عبارات داده شده را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

(آ)

$$x^2 - 7y$$

(ب)

$$x^2 + 2x + 1 - 16y^2$$

(پ)

$$3x^2 - 625$$

پاسخ:

اتحاد مزدوج:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

بنابراین برای تجزیه هر یک از موارد (آ)، (ب)، (پ) کفایت a و b را بدست آوریم:



(آ)

$$x^2 - 7y \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \sqrt{7y} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7y = (x - \sqrt{7y})(x + \sqrt{7y})$$

(ب)

$$x^2 + 2x + 1 - 16y^2$$

$x^2 + 2x + 1$ همان طرف دوم اتحاد مربع دو جمله ای است:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

بنابراین داریم:

$$x^2 + 2x + 1 - 16y^2 = (x + 1)^2 - 16y^2 \Rightarrow \begin{cases} a = (x + 1) \\ b = 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((x + 1) - 4y)((x + 1) + 4y)$$

(پ)

$$3x^2 - 625 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}x \\ b = \sqrt{625} = 25 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 625 =$$

$$(\sqrt{3}x + 25)(\sqrt{3}x - 25)$$



۱۷- مجموع دو عدد a و b برابر است با ۱۰ و تفاضل مربع این دو عدد برابر است با ۳۰.
تفاضل این دو عدد را بیابید.

پاسخ:

$$a + b = 10 \quad a^2 - b^2 = 30$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \Rightarrow 30 = 10(a - b) \Rightarrow (a - b) = 3$$

۱۸- فرض کنید تفاضل دو عدد a و b برابر با ۲ باشد و حاصل ضرب این دو عدد ۳۵ باشد، حاصل $a^3 - b^3$ را بیابید.

پاسخ:

$a^3 - b^3$ در اتحاد مکعب دوجمله ای ظاهر می شود:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b - b^3 + 3ab^2$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a - b)^3 - 3ab^2 + 3a^2b = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

به طور خلاصه:

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

بهتر است نتیجه های اتحاد مکعب دوجمله ای را به خاطر بسپارید حال داریم:

$$a^3 - b^3 = (2)^3 + 3(35)(2) \Rightarrow a^3 - b^3 = 8 + 210 = 218$$

۱۹- عبارات داده شده را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه کنید.

$$125 + 27x^3 \quad (\text{آ})$$

$$64x^3 - 8y^3 \quad (\text{ب})$$

پاسخ:

اتحاد چاق و لاغر:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

بنابراین کافی است در هر مورد a و b را شناسایی کنیم:

(آ)

$$a^3 = 125 \Rightarrow a = 5 \quad b^3 = 27x^3 \Rightarrow b = 3x$$

$$125 + 27x^3 = (5 + 3x)(25 - 15x + 9x^2)$$

(ب)

$$a^3 = 64x^3 \Rightarrow a = 4x \quad b^3 = 8y^3 \Rightarrow b = 2y$$

$$64x^3 - 8y^3 = (4x - 2y)(16x^2 + 16xy + 4y^2)$$



بانک محتوای آموزشی SET

آسان و سریع مطالب مهم را مرور کنید و برای آزمون آماده شوید.

همین الان کلیک کن



دوره‌های آموزشی

با دوره‌های آموزشی وارد مسیر یادگیری شوید و گام به گام خود را در کل درس راحت کنید.



نمونه‌سوال‌ات حل شده

با نمونه سوال‌ات حل شده درس به درس، مثال‌های مهم را ببینید و مفاهیم را آسان درک کنید.



خلاصه نکات

با خلاصه نکات درس به درس فقط به نکات مهم بپردازید و زمان را ذخیره کنید.



ویدئو آموزشی

با ویدئوهای کوتاه درس به درس، مطالب درس را آسان و سریع یاد بگیرید.



www.youtube.com/@saminskill

www.aparat.com/set_ir_official

www.instagram.com/set.ir.shop

t.me/set_ir_levelup

[@set_ir_levelup](https://www.facebook.com/set_ir_levelup)

[@levelupset](https://www.facebook.com/levelupset)

۰۲۱۴۴۰۷۰۷۳۰

۰۹۰۲۷۱۴۳۴۰۲



اسکن کنید