ریاضی دهم ۱۰

متوسطه دوم

(نکات و خلاصه درس)

فصل اول : مجموعه، الگو، دنباله

درس اول : مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

در این بخش ابتدا به یادآوری مفهوم مجموعه‌ها می‌پردازیم و سپس مجموعه‌های معروف از جنس اعداد را یادآوری می‌کنیم. با مفهوم بازه ها که زیرمجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، هستند آشنا می‌شویم و اعمالی مانند تفاضل مجموعه ها، اشتراک گیری، اجتماع گیری و متمم گیری روی بازه‌ها را تمرین خواهیم کرد.

تعریف: دسته ای کاملاً مشخص از اشیاء دو به دو متمایز را مجموعه گویند.

تذکر: مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهند.

مثلا:

$A = \{$مجموعه ی تمام نانوایی های شهر کرج$\}$

بعضی از مجموعه‌ها که از جنس عدد هستند، نام خاصی ندارند. مثلاً {۹، ۵، ۴}. ولی برخی دیگر از این مجموعه‌ها، در همه جای دنیا معروف اند و همه به یک اسم آن‌ها را می‌شناسند. با هم به یادآوری آن‌ها می‌پردازیم:

• مجموعه‌ی اعداد طبیعی:

این مجموعه را با نماد $\mathbb{N}$ ، نمایش می‌دهیم و اعضای آن عبارت است از:

$\mathbb{N} = \{۱ . ۲ . ۳ . ...\}$

• مجموعه‌ی اعداد حسابی:

این مجموعه را با نماد $\mathbb{W}$، نمایش می‌دهیم و اعضای آن عبارتست از:

$\mathbb{W} = \{۰ . ۱ . ۲ . ۳ . ...\}$

• مجموعه‌ی اعداد صحیح:

این مجموعه را با نماد $\mathbb{Z}$، نمایش می‌دهیم و اعضای آن عبارت است از:

$$\mathbb{Z} = \{\dots . -۳ . -۲ . -۱ . ۰ . ۱ . ۲ . ۳ . \dots\}$$

• مجموعه‌ی اعداد گویا:

این مجموعه را با نماد $\mathbb{Q}$، نمایش می‌دهیم و اعضای آن عبارت است از:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a . b \in \mathbb{Z} . b \neq ۰\}$$

نتیجه گیری: عدد x، گویاست اگر بتوان آن را به صورت عدد کسری $\frac{a}{b}$ نمایش داد، به طوری که هم a و هم b صحیح باشند و b صفر نباشد.

مثلا: عدد ۳ گویاست، زیرا آن را می‌توان به صورت" $\frac{۳}{۱}$ " نشان داد.($۳ . ۱ \in \mathbb{Z}$ و $۱ \neq ۰$)

نکته‌ها

- همه‌ی اعداد اعشاری مختوم (متناهی) گویا هستند. همچنین همه‌ی اعداد اعشاری نامختوم (نامتناهی) اما متناوب، گویا هستند. مثال: $۲۵\overline{۳۷}$. ۲/۲۴

- اعداد گنگ، را با نماد Q' نمایش می‌دهیم و عبارت است از اعدادی که گویا نیستند، یعنی نمی‌توان آن‌ها را به صورت عدد $\frac{a}{b}$ای نمایش داد که $a . b \in \mathbb{Z}$ باشند و $b \neq ۰$.
مثال: عدد $\sqrt{۲}$ عدد گنگ است.

- تمام اعداد رادیکالی که حاصل رادیکال یک عدد اعشاری نامختوم غیرمتناوب باشد، گنگ است، هر ضریب گویا از یک عدد گنگ، باز هم گنگ است. مثلا $۲\sqrt{۲}$ ، $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ گنگ هستند.

- هر ضریب گنگ از یک عدد گنگ، ممکن است گنگ نباشد. مثلاً $\sqrt{۲}$ گنگ است ولی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر آن گویاست، زیرا داریم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = ۱$$

• مجموعه‌ی اعداد حقیقی:

این مجموعه را با نماد $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از:

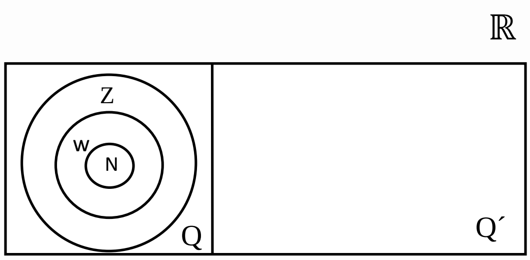
$$\mathbb{R} = Q \cup Q' \qquad (۱)$$

تذکر: گوئیم مجموعه‌ی $A \subseteq B$ است، هرگاه هر عضو A، عضوی از B باشد.

در حالت کلی برای مجموعه‌های ذکر شده داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad (۲)$$

می‌توان روابط (۱) و (۲) را در نمودار وِن چنین نمایش داد:



مثال ها

۱) وضعیت هر کدام از اعداد زیر را از نظر گنگ یا گویا بودن مشخص کنید. همچنین در صورتی که عدد گویا باشد تعیین کنید که این عدد آیا عضو $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{W}$ هم است یا خیر؟

الف) $۲/\overline{۳۷}$ ب) $\pi = ۳/۱۴...$ پ) ۳π ت) $\frac{\pi}{۳}$ ث) -۱۲

ج) $۳\sqrt{۲}$ چ) $\frac{۱۲}{۵}$ ح) ۲ خ) ۰ د) $۲/۲۳$

پاسخ:

گزینه (الف) یک عدد اعشاری نامختوم متناوب است، پس گویاست و می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{a}{b}$ نمایش داد به طوری که $a.b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq ۰$.

گزینه (ب) عدد π، است که یک عدد اعشاری غیرمختوم و نامتناوب است و نمی‌توان آن را به صورت $\frac{a}{b}$ که $a.b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq ۰$ نشان داد، پس گنگ است.

گزینه های(پ) و (ت) نیز گنگ هستند زیرا همان طور که قبلا اشاره شد هر ضریب گویا از یک عدد گنگ،گنگ است. با همین استدلال گزینه ی (ج)نیز گنگ است.

گزینه (ث) گویاست زیرا می‌توان آن را به صورت $\frac{-۱۲}{۱}$ نوشت، همچنین -۱۲، یک عدد صحیح است.

گزینه (چ) به وضوح گویاست.

گزینه (ح) هم گویاست و هم طبیعی و هم صحیح و هم حسابی.

گزینه (خ) گویاست. زیرا می‌توان آن را به صورت $\frac{۰}{۵}$ نوشت، هم چنین ۰ جزو اعداد حسابی و صحیح نیز هست.

گزینه (د) نیز گویاست زیرا یک عدد اعشاری مختوم است.

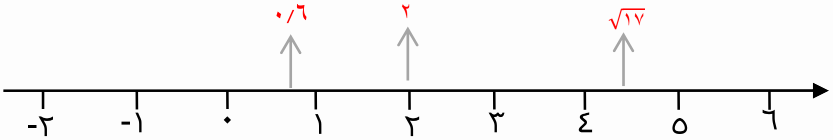
اگر جدولی مثل جدول زیر داشته باشیم می‌توانیم گزینه‌ها را اینچنین دسته بندی کنیم:

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="2">اعداد حقیقی:</td></tr>
<tr><td>گویا:
(چ): $\frac{۱۲}{۵}$ (الف): ۲/$\overline{۳۷}$ (د): ۲/۲۳</td><td></td></tr>
<tr><td>گویا و صحیح :
(ث): ۱۲-</td><td rowspan="3">گنگ:
(ب): ...۳/۱۴
(ت): $\frac{\pi}{۳}$
(پ): ۳ π
(ج): ۳$\sqrt{۲}$</td></tr>
<tr><td>گویا و صحیح، وحسابی :
(خ): ۰</td></tr>
<tr><td>گویا و صحیح و حسابی وطبیعی:
(ح): ۲</td></tr>
</table>

توجه: هر عدد حقیقی روی محور اعداد حقیقی قابل نمایش است و هر نقطه روی محور اعداد حقیقی بیانگر یک عدد حقیقی است.

مثال ها

۲) می‌خواهیم جایگاه عدد گنگ $\sqrt{۱۷}$ ، عدد گویای $\frac{۳}{۵}$، عدد صحیح ۲ را روی محور حقیقی نشان دهیم:



پاسخ:

برای تعیین محدوده ی $\sqrt{۱۷}$ توجه کنید که اولین عدد بزرگتر از ۱۷ که ما می‌دانیم جذرش ۲۵ است و اولین عدد کوچکتر از ۱۷ که جذرش عدد ۱۶ است، پس $\sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۷} < \sqrt{۲۵}$ است،

در نتیجه $۴ < \sqrt{۱۷} < ۵$ است.

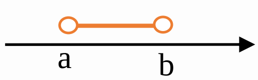
عدد $\frac{۳}{۵}$ همان $\frac{۶}{۱۰}$ است و $\frac{۶}{۱۰}$ عددی است نزدیک به ۰/۵ که بین صفر و ۱ است.

عدد ۲ نیز به سادگی روی محور قابل نمایش است.

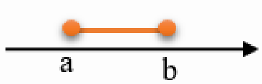
تعریف: بازه‌ها، مجموعه‌هایی از جنس اعداد حقیقی هستند که از نظر هندسی یک تکه از محور اعداد حقیقی را نشان می‌دهند.

فرض کنید a و b، دو عدد حقیقی باشند و مثلا a<b باشد، آن‌گاه:

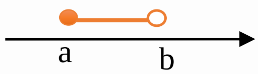
- **مجموعه‌ی $\{x \in R \mid a < x < b\}$ را با نماد $(a.b)$ نمایش می‌دهیم و آن بازه‌ی باز a و b می‌نامیم.**



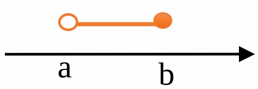
- **مجموعه‌ی $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ را با نماد $[a.b]$ نمایش می‌دهیم و آن بازه‌ی بسته‌ی a وb می‌نامیم.**



- مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x < b\}$ را با نماد $[a.b)$ نمایش می‌دهیم و آن بازه‌ی نیم باز (نیم‌بسته) a و b می‌نامیم.



- مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}|a < x \leq b\}$ را با نماد $(a.b]$ نمایش می‌دهیم و آن بازه‌ی نیم باز (نیم بسته) a و b می‌نامیم.

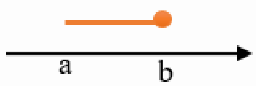


همچنین بازه‌هایی داریم که از یک سمت نامحدود هستند. برای نشان دادن سمت نامحدود از نماد $+\infty$ یا $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ باشد، آن گاه:

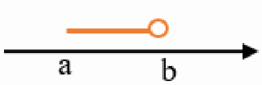
- مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}|x \geq a\}$ را با نماد $[a\,.+\infty)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه‌ی نیم باز a تا $+\infty$ می‌نامیم.

- مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ را با نماد $(-\infty . a]$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه ی نیم باز $-\infty$ تا a می‌نامیم.



- مجموعه ی $\{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ را با نماد $(a . \infty)$ نمایش می‌دهیم و آن را بازه‌ی باز a تا ∞ می‌نامیم.

- مجموعه ی $\{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ را با نماد $(-\infty . a)$ نمایش می‌دهیم و آن را باز $-\infty$ تا a می‌نامیم.



توجه: می‌دانیم که طول بازه $\{x \in R \,| a < x < b\}$ برابراست با: $|b - a|$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی :

تعریف: به مجموعه ای که اعضای آن قابل شمارش و مجموعه ای محدود هستند و در واقع تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد ، متناهی گویند.

به طور مثال: تعداد اعضای مجموعه‌ی $\emptyset$ صفر است، پس $\emptyset$ یک مجموعه‌ی متناهی است. تعداد اعضای مجموعه‌ی اعداد فرد بین ۱۰ و ۲۱ ، ۵ است، پس این مجموعه نیز متناهی است. تعداد اعضای اعداد صحیح بین (۳۰۰+ ،۳۰۰-) نیز ۵۹۹ تاست، پس این مجموعه نیز متناهی است.

تعریف: مجموعه ای که متناهی نباشد، نامتناهی نامیده می‌شود. مثلا $\mathbb{R}$.$\mathbb{N}$ یا بازه‌ی (۰،۲) و.... زیرا کسی نمی‌داند $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{N}$ یا (۰،۲) دقیقا چه تعداد عضو دارند.

تذکر: تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با نماد $n(A)$ نمایش می‌دهیم. مثلا:

$n(\emptyset) = ۰ \qquad n(\{۱.۲.۳.۷\}) = ۴$

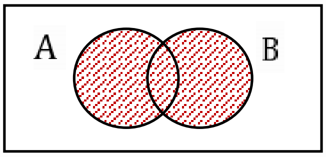
چیزی که برای ما بسیار اهمیت دارد تعداد اعضای $(A \cap B)$ و $(A \cup B)$ است.

نکته‌ها

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

در این جا با استفاده از نمودار وِن خواهیم فهمید این عبارت از کجا آمده :

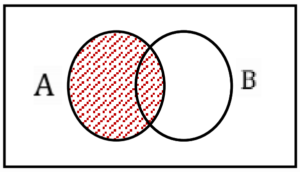
ما دنبال تعداد اعضای قسمت هاشور خورده هستیم:



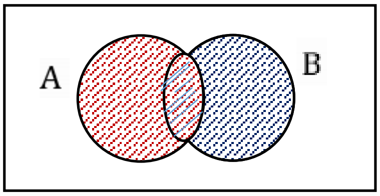
(۱)

فرض کنید $n(A)$ و $n(B)$ را جمع بزنیم.

$n(A)$ را جدا هاشور بزنید.



حال $n(B)$ را نیز می‌خواهیم اضافه کنیم، $n(B)$ را هم با رنگی متفاوت هاشور بزنید.



همان طور که مشاهده می‌کنید $n(A \cap B)$، یک بار با $n(A)$ و یکبار با $n(B)$ یعنی در مجموع ۲ بار محاسبه شد، پس یکبار از این دو بار را کم می‌کنیم که هر یک از قسمت های هاشور خورده ی شکل (۱) فقط یک مرتبه حساب شده باشند. یعنی داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با بیان یک مثال، این موضوع را روش تر بیان می‌کنیم:

مثال ها

۳) فرض کنید کلاسی داریم که در این کلاس ۲۰ نفر به نام‌های $a_{۱} . a_{۲} . .... . a_{۲۰}$ حضور دارند، فرض کنید:

$A = \{a_{۱} . a_{۲} . a_{۳} . .... . a_{۱۵}\}$ مجموعه‌ی کسانی باشد که فوتبال بازی می‌کنند.

$B = \{a_{۱} . a_{۲} . a_{۳} . .... . a_{۱۷}\}$ مجموعه ی کسانی باشند که بسکتبال بازی می‌کنند.

اگر بدانیم در این کلاس هیچ ورزش دیگری به جز فوتبال و بسکتبال انجام نمی‌شود، چند نفر ورزشکار در این کلاس داریم؟

پاسخ :

اگر بگوئیم ۱۵ نفر فوتبال و ۱۷ نفر بسکتبال بازی می‌کند، پس ۳۲ نفر در این کلاس ورزشکار داریم پاسخ غلط است. چطور ممکن است در کلاسی که فقط ۲۰ نفر وجود دارد ۳۲ نفر ورزشکار باشد؟ این روش یک اشکال اساسی دارد و آن این است که نفرات $a_۱$ تا $a_{۱۵}$ که هر ۲ ورزش را انجام می‌دهند ۲دو بار شمرنده شده اند. مثلاً $a_۸$، دو بار شمارش شده است در حالی که $a_۸$ دو نفر نیست.

پس می‌توانیم تعداد اعضای A و B را جمع کنیم و تعداد اعضای مشترک بین آنها را یکبار کم کنیم:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$$

حال سؤال این است که در این کلاس ۲۰ نفره، چند نفر ورزش نمی‌کنند؟

۲۰-۱۷=۳

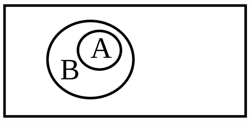
نتیجه گیری: اگر U، یک مجموعه ی متناهی باشد، آنگاه داریم:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

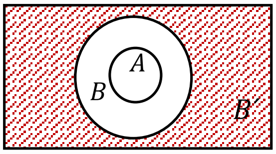
تذکر: در ریاضی هر جا A-B دیدید، می‌توانید به جای آن $A \cap B'$ قرار دهید:

(علت این تذکر در حیطه‌ی مطالعه‌ی آزاد است اما مطالعه‌ی آن کمک به تفهیم بهتر فرمول خواهد کرد.)

علت: ابتدا فرض کنید A-B، $\emptyset$ باشد، آن‌گاه هیچ عضوی در A نداریم که در B نباشد (طبق تعریف A-B) یعنی A هر عضوی دارد در B نیز هست. یعنی $A \subseteq B$ است، خب حالا اگر $A \subseteq B$ باشد:

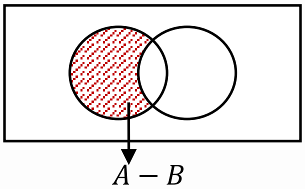


A با B´ اشتراکی نمی‌توانند داشته باشد.

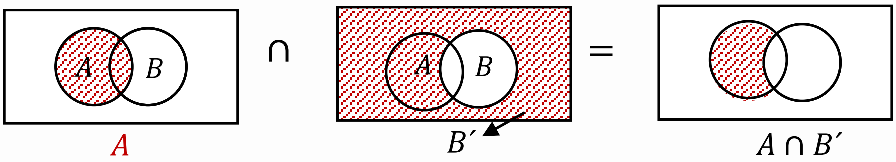


پس $A \cap B'$ نیز $\emptyset$ است. و در این حالت $\emptyset = A - B = A \cap B' = \emptyset$

حال فرض کنید A-B، مخالف $\emptyset$ باشد. یعنی در این حالت حداقل ۱ عضو در A هست که در B نیست. فرض کنیم:



حالا نمودار $A \cap B'$ را رسم می‌کنیم:



همان طور که ملاحظه می‌کنید: $A - B = A \cap B'$

نتیجه گیری:

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$n(A \cap B) = n(A - B')$ **است. زیرا:**

$$A \cap B = A - B'$$

و $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ **است. زیرا:**

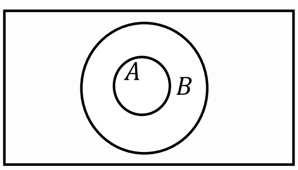
$$A - B = A - (A \cap B)$$

نکته ها

- فرض کنید U متناهی باشد،یکی از قوانین دمورگان این است که $(A \cup B)' = A' \cap B'$ در نتیجه $n(A \cup B)' = n(A' \cap B')$ اما $n(A \cup B)'$ همان $n(U) - n(A \cup B)$ است. پس داریم:

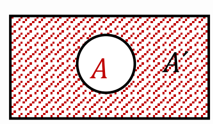
$$n(A \cup B)' = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

- اگر $A \subseteq B \subseteq U$ باشد، آن گاه: $B' \subseteq A'$

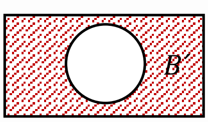


علت:

A':



B':



پر واضح است که $B' \subseteq A'$ است.

برای تکمیل بحث به ارائه‌ی چند تمرین می‌پردازیم و سپس وارد قسمت دیگر از فصل اول خواهیم شد.

مثال ها

۴) فرض کنید A و B زیر مجموعه های مجموعه ی U باشند و داشته باشیم:

$$n(A \cap B) = ۸ \,.\, n(B) = ۱۵ \,.\, n(A) = ۲۰ \,،\, n(U) = ۴۰$$

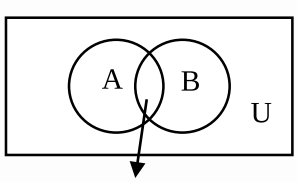
موارد زیر را بدست آورید:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cup B')$ پ) $n(A \cap B')$

ت) $n(A' \cap B')$ ث) $n(A')$

پاسخ:

ابتدا نمودار وِن این سؤال را رسم می‌کنیم.



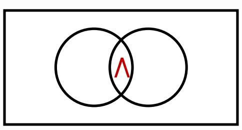
$A \cap B$

(توجه چون $n(A \cap B) \neq ۰$ است، یعنی A و B با هم اشتراک دارند، لذا در رسم شکل A و B را متقاطع رسم می‌کنیم)

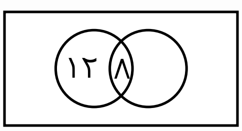
حالا سعی می‌کنیم با اعداد نمودار را پر کنیم:

$n(A) = ۲۰ \qquad n(A \cap B) = ۸ \qquad n(B) = ۱۵$

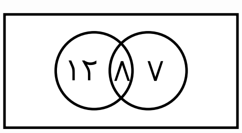
از این اطلاعات که در صورت سؤال آمده می‌فهمیم قسمت مشترک A و B، ۸ عضو دارد.



پس قسمت غیرمشترک از A با B، ۱۲ عضو :



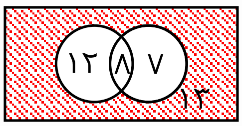
و قسمت غیرمشترک از B با A، ۷ عضو خواهد داشت:



که با اطلاعات مسئله جور درمی‌آید. زیرا A ، ۲۰ عضو داشت و طبق شکل بالا نیز ۲۰ عضو دارد، B هم ۱۵ عضو داشت قسمت مشترک هم ۸ عضو دارد. پس داریم:

$$\mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \left(\underbrace{n(A)}_{۲۰} + \underbrace{n(B)}_{۱۵} - \underbrace{n(A \cap B)}_{۸} \right) = ۲۷$$

$n(U)$ ، ۴۰ بود پس قسمت هاشور خورده‌ی زیر که بیانگر $n(A \cup B)'$ است،۱۳=۲۷-۴۰ عضو دارد.

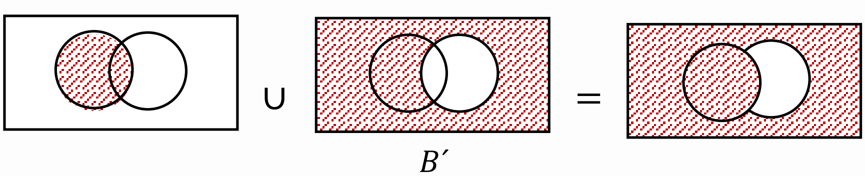


حالا که اطلاعات مسئله را در شکل آخر وارد کردیم، به راحتی می‌توانیم به تک تک سؤالات جواب دهیم:

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۷$

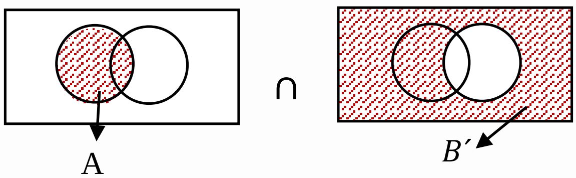
ب) $n(A \cup B') =$

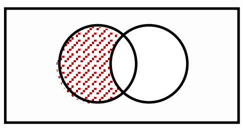
می‌توانیم از نمودار استفاده کنیم و ابتدا $A \cup B'$ را هاشور بزنیم.



$\rightarrow ۱۳ + ۱۲ + ۸ = ۳۳$

پ) $A \cap B'$ در شکل یعنی:

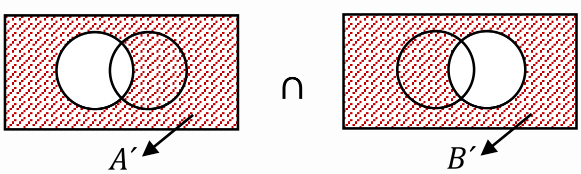


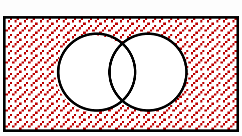
$A \cap B' =$ 

که با توجه به نمودار ونی که در ابتدا رسم کردیم، داریم:

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = ۲۰ - ۸ = ۱۲$$

ت) $A' \cap B'$ را در شکل مشخص می‌کنیم:



$A' \cap B'$: 

که با توجه به تجزیه و تحلیل صورت مسئله داریم:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) =$$

$$۴۰ - (۲۷) = ۱۳$$

ث)

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

$$۴۰ - ۲۰ = ۲۰$$

مثال ها

۵) اگر $n(A \cap B)$ ۷ $= n(A) + n(B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به جای $n(A) + n(B)$ قرار دهید $n(A \cap B)$ ۷ پس:

$$n(A \cup B) = ۷\, n(A \cap B) - n(A \cap B) = ۶\, n(A \cap B)$$

پس در نهایت: $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = ۷$

مثال ها

۶) کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟

الف) مجموعه ی اعداد صحیح ۳ رقمی

ب) عوامل اول عدد ۱۰۵

پ) مجموعه ی مضارب عدد ۴ که صحیح هستند و کوچکتر از ۲۵

ت) $\{x \in \mathbb{R} | ۰ < x < ۱\}$

ث) $\{x \in \mathbb{N} | ۰ < x < ۲\}$

ج) $\emptyset$

چ) $Q \cap Q'$

ح) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

پاسخ:

(الف) متناهی است زیرا تعداد اعداد ۳ رقمی‌برابر است با:

اعداد ۳رقمی مثبت و صحیح $۱۰۰۰ - ۱۰۰ = ۹۰۰$

اعداد ۳رقمی منفی و صحیح $-۱۰۰ - (-۱۰۰۰) = ۱۰۰ + ۱۰۰۰ = ۹۰۰$

و در مجموع ۱۸۰۰ عدد صحیح ۳ رقمی‌وجود دارد.

مورد (ب) متناهی است. به وضوح عوامل اول عدد ۱۰۵ متناهی است: ۱۰۵=۷×۵×۳

ومجموعه‌ی {۳و۵و۷} ، سه عضو دارد.

مورد (پ) نامتناهی است. زیرا مجموعه‌ی موردنظر عبارت است از:

$\{\dots.-۴.۰.۴.۸.۱۲.۱۶.۲۰.۲۴\}$

مورد (ت) نامتناهی است، اگر این مجموعه را به شکل بازه نشان دهیم:

$(۰.۱) = \{x \in \mathbb{R} | ۰ < x < ۱\}$

بین عدد ۰ و ۱، بی نهایت عدد گویا و گنگ وجود دارد، پس این مجموعه بی نهایت عضو دارد و بنابراین این مجموعه نامتناهی است.

مورد (ث) متناهی است. زیرا فقط ۱ عضو دارد: $\{۱\}$

(ج) نیز متناهی است. $n(\emptyset) = ۰$

(چ) معادل است با $Q \cap Q' = \emptyset$. $n(\emptyset) = ۰$ ، پس این مجموعه متناهی است.

(ح) معادل با $\{۰\} = \mathbb{W} - \mathbb{N}$ است و مجموعه $\{۰\}$، فقط یک عضو دارد و این مجموعه متناهی است.