هندسه یازدهم

11

متوسطه دوم

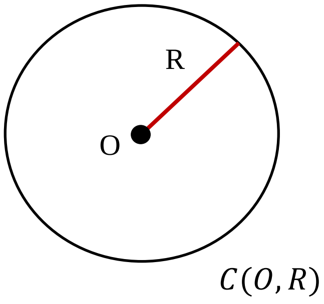
(نکات و خلاصه درس)

فصل اول : دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره:

مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که فاصله‌ی آن ها از نقطه‌ی ثابتی در آن صفحه، برابر مقداری ثابت باشد، یک دایره است. به عبارت دیگر، فاصله ی هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع است. یک دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد C(O,R) نشان می دهیم.

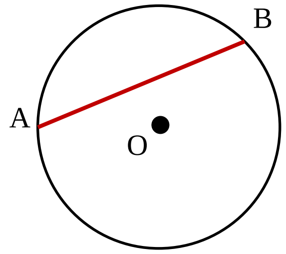


شعاع دایره:

به پاره خطی که یک انتهای آن مرکز دایـره (O) و انتهـای دیگـر آن نقطـه ای روی دایـره باشد، شعاع دایره (R)گوییم.

وتر دایره:

پاره خطی که دو نقطه‌ی متمایز روی دایره را به هم وصل می کند، وتر دایره است.

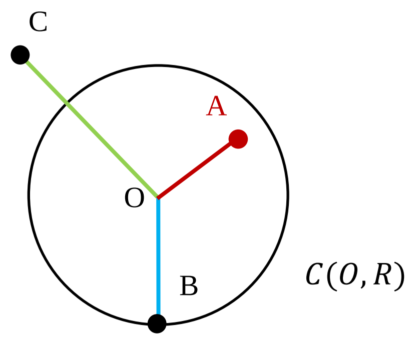


(وتر AB)

قطر دایره:

وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد را قطر می نامیم.

اوضاع نسبی نقطه و دایره:



۱) اگر نقطه ی A، درون دایره‌ی $C(O,R)$ باشد، فاصله‌ی آن تا مرکز دایره (O) کمتر از شعاع دایره (R) است. (مانند نقطه‌ی A در شکل بالا)

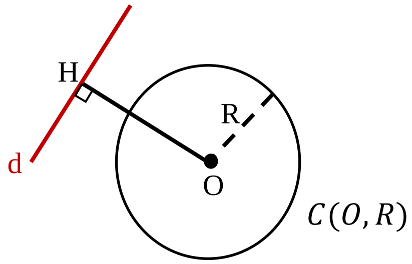
۲) اگر نقطه ی B، روی دایره‌ی $C(O,R)$ باشد، فاصله‌ی آن تا مرکز دایره برابر شعاع است. (مانند نقطه‌ی B در شکل بالا)

۳) اگر نقطه ی C، بیرون دایره‌ی $C(O,R)$ باشد، فاصله‌ی آن تا مرکز دایره، بیش تر از شعاع دایره است. (نقطه ی Cدر شکل بالا).

اوضاع نسبی خط و دایره:

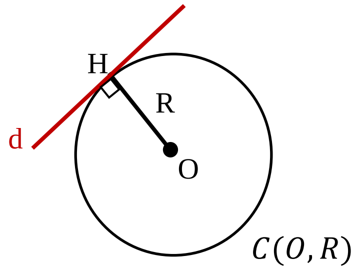
۱) متخارج: خط d هیچ اشتراکی با دایره $C(O,R)$ ندارد. در این حالت فاصله ی نقطه O، از خط d بیش تر از شعاع دایره است.

$$(OH > R)$$



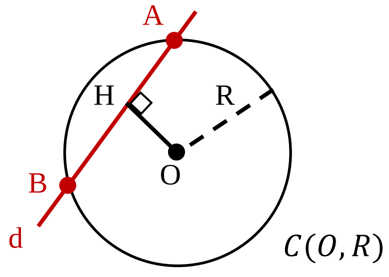
۲) مماس: خط d با دایره $C(O,R)$ ، فقط و فقط در یک نقطه مشترک است. در این حالت فاصله‌ی نقطه‌ی O از خط d برابر با شعاع دایره است و می گوییم خط بر دایره <u>مماس</u> است.

$$(OH = R)$$



۳) متقاطع : خط d با دایره C(O,R) در دو نقطه اشتراک دارد. در این حالت خط و دایره را متقاطع می نامیم و فاصله‌ی نقطه‌ی O از خط d کمتر از شعاع دایره است و گفته می شود خط نسبت به دایره قاطع است.

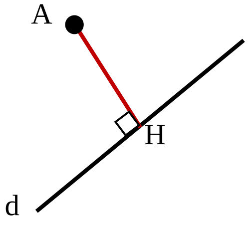
$$(OH < R)$$



یادآوری:

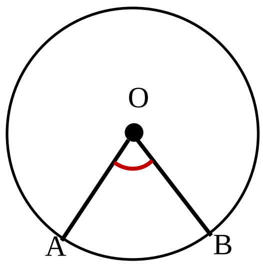
فاصله ی نقطه ی $A(x_0, y_0)$ از خط $d = ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



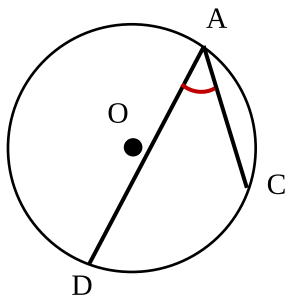
زاویه‌ی مرکزی:

زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است. به عنوان مثال زاویه ی $\widehat{AOB}$ یک زاویه‌ی مرکزی است.



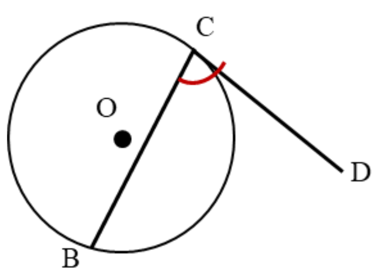
زاویه‌ی محاطی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند. مانند زاویه ی $\widehat{CAD}$ در شکل زیر:



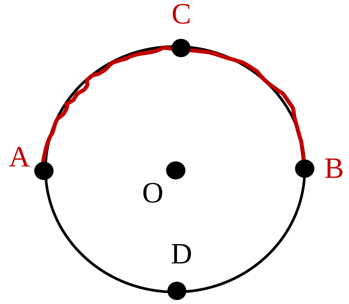
زاویه‌ی ظلّی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش، مماس بر دایره است. مانند زاویه ی $\widehat{BCD}$ در شکل مقابل.



کمان:

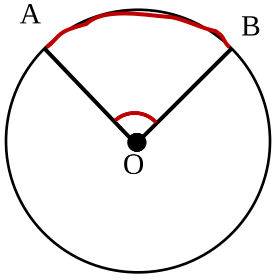
دو نقطه‌ی A و B بر یک دایره، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی آن دایره مشخص می کنند. در این حالت، برای مشخص کردن هر یک از آن ها، از نقطه ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می‌کنیم. مانند کمان های $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ در شکل روبه رو.



اندازه ی کمان:

هر کدام از زاویه های تعریف شده، یک کمان از دایره جدا می کنند که کمان نظیر آن زاویه نامیده می شود. به عنوان مثال، اندازه ی کمان نظیر هر زاویه ی مرکزی، همان اندازه ی زاویه ی مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود که واحد آن درجه است.

کمان $\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB}$ زاویه ی مرکزی

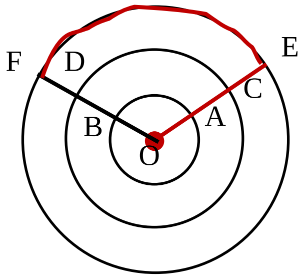


هندسه یازدهم
متوسطه دوم

نکته:

۱) کمان های دایره های مختلف، می توانند اندازه های برابر و طول های نابرابر داشته باشند.

به عنوان مثال در شکل روبه رو داریم:



$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{AOB}=\widehat{COD}=\widehat{EOF}\\ \underbrace{\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{CD}\neq\overset{\frown}{EF}}_{\text{کمان هایی با طول های نابرابر}}\end{array}\right.$$

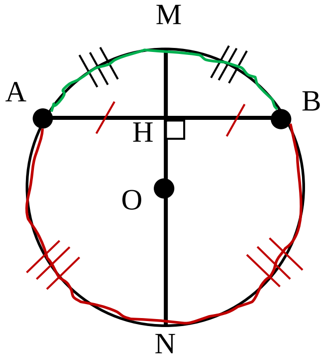
ولی

$$\underbrace{|\overset{\frown}{AB}|=|\overset{\frown}{CD}|=|\overset{\frown}{EF}|}_{\text{کمان هایی با اندازه های برابر}}$$

۲) هر چقدر که یک وتر به مرکز دایره نزدیک تر باشد، طولش بزرگتر می شود و برعکس.

نکته:

۳) اگر از مرکز دایره عمودی بر یک وتر رسم کنیم، وتر را که نصف می کند هیچ، کمان های متناظر این وتر را هم نصف می کند. به عنوان مثال در شکل روبه رو، داریم:



$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB} \quad , \quad \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \quad , \quad AH = HB$$

۴) محیط دایره، یک کمان به اندازه ی 360° است. بنابراین رابطه ی اندازه کمان AB با طول کمان AB برابر است با:

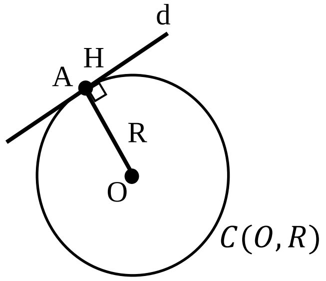
$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه ی کمان } AB}{360}$$

مثال ۱: ثابت کنید: « یک خط و دایره بر هم مماس اند، اگر و تنها اگر این خط بر شعاع گذرنده از نقطه ی تماس عمود باشد»

پاسخ :

فرض می کنیم خط d بر دایره ی $C(O,R)$، در نقطه ی A مماس باشد.

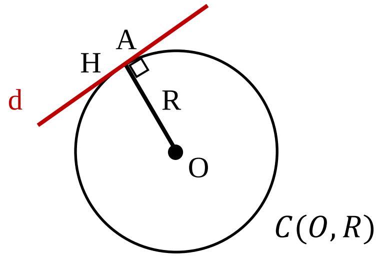
می خواهیم ثابت کنیم $d \perp OH$. از نقطه ی O بر خط d، خط عمودی رسم می کنیم و پای عمود را H می نامیم. در واقع H نزدیک ترین نقطه از خط d به O است، بنابراین نقطه ی A و H بر هم منطبق اند و OH=R . پس $d \perp OH$.



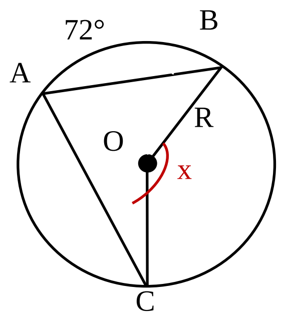
برعکس:

این بار شعاع گذرنده از نقطه ی A را رسم می کنیم.

سپس خط گذرنده از نقطه ی A (خط d) عمود بر OA را رسم می کنیم. چون نقطه ی H از خط d، کمترین فاصله را از O دارد، بنابراین این خط دو نقطه ی A، بر دایره ی $C(O,R)$ مماس است.



مثال۲: در دایره ی $C(O,R)$ مطابق شکل روبه رو:



الف) اگر $\overset{\frown}{AC} =$. آنگاه زاویه ی $\widehat{BOC}$ را بیابید.

ب) اگر $x = 165^{\circ}$ ، آنگاه اندازه ی کمان AC را بدست بیاورید.

پاسخ:

الف) چون طول کمان AC داده شده است پس طول کمان $\overset{\frown}{BC}$ را بدست می آوریم:

$$\overset{\frown}{BC} = 360^{\circ} - \left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}\right) = 360^{\circ} - (72^{\circ} + 148^{\circ}) = 140^{\circ}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 140^{\circ} \quad (\text{زاویه ی مرکزی})$$

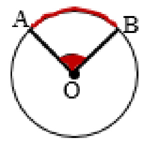
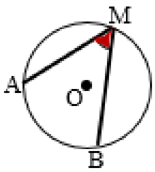
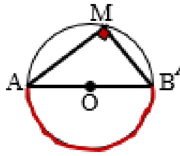
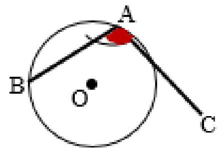
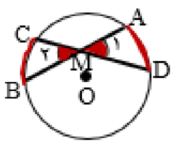
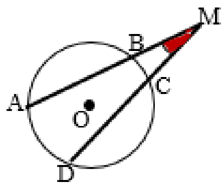
ب) $x = 165^{\circ} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 165^{\circ}$

$$\overset{\frown}{AC} = 360^{\circ} - \left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}\right) = 360^{\circ} - (72^{\circ} + 165^{\circ}) = 123^{\circ}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 123^{\circ}$$

انواع زاویه ها در دایره:

به طور کلی در هر دایره، ۵ نوع زاویه داریم که در جدول زیر بیان می کنیم.

نوع زاویه	شکل	اندازه	حالت خاص مهم
زاویه ی مرکزی		$\widehat{AOB}=\overset{\frown}{AB}$	
زاویه ی محاطی		$\widehat{AMB}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$	زاویه ی محاطی روبه رو به قطر برابر با 90° است.  $\widehat{AMB}=90^\circ$
زاویه ی ظلّی		$\widehat{BAC}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$	
زاویه ی وتری داخلی		$\widehat{M}_1=\widehat{M}_2=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{2}$	
زاویه ی وتری خارجی		$\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{2}$	زاویه ی حاصل از برخورد دو مماس بر دایره $\widehat{AMB}=\frac{x-y}{2}$

تذکّر:

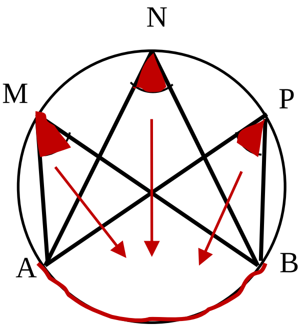
۱) در هر کدام از زوایای تعریف شده، وتر می تواند قطر دایره باشد.

۲) زاویه‌ای که از برخورد دو وتر دایره به‌وجود می‌آید را، زاویه‌ی وتری تعریف کرده‌ایم.
(در جدول صفحه قبل)

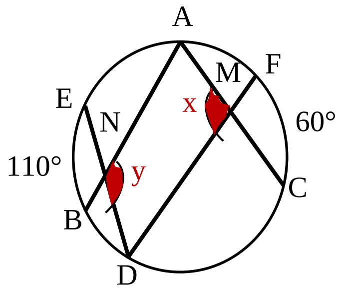
نکته:

همه‌ی زاویه های محاطی روبه رو به یک کمان، با هم برابرند. به عنوان مثال در شکل زیر، داریم:

$$A\widehat{M}B = A\widehat{N}B = A\widehat{P}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



مثال۳ : **در شکل مقابل، مقدار $x + y$ را بدست بیاوید.**



پاسخ:

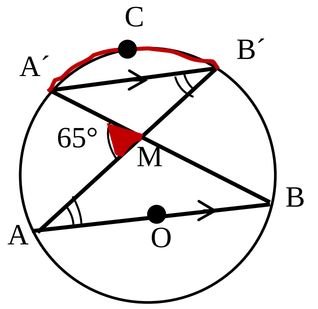
با یافتن مقدار $\hat{A} + \widehat{D}$ ، مقدار $x + y$ مشخص می شود، چون مجموع زوایای چهارضلعی AMDN برابر 360° است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} \text{زاویه ی‌محاطی } \hat{A} &= \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2} \\ \text{زاویه ی‌محاطی } \widehat{D} &= \frac{\overset{\frown}{EAF}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A + D = \frac{\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{EAF}}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - (\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{CF})}{2} = \frac{360^\circ - (110^\circ + 60^\circ)}{2} = \frac{190^\circ}{2} = 95^\circ$$

$$\xRightarrow{\text{درنتیجه داریم}} x + y = 360^\circ - (\hat{A} + \widehat{D}) = 360^\circ - 95^\circ = \boxed{265^\circ}$$

مثال۴ : در شکل مقابل، O مرکز دایره است و $AB \parallel A'B'$. اندازه ی کمان $A'CB'$ را بدست بیاورید.



پاسخ:

$$AB \parallel A'B' \Rightarrow \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'} \quad (1)$$

$$\widehat{A'MA} = \frac{\overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{BB'}}{2} \xRightarrow[(1)]{\text{طبق}} \widehat{A'MA} = \frac{\overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{AA'}}{2}$$

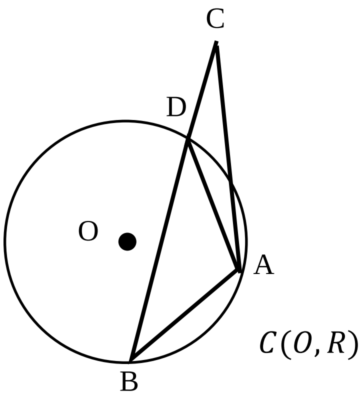
$$\Rightarrow \widehat{A'MA} = \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'} = 65^\circ \quad (2)$$

چون AB قطر دایره است، بنابراین:

$$\overset{\frown}{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'CB'} + \overset{\frown}{BB'} = 180^\circ$$

$$\xRightarrow[(2)]{\text{طبق}} \overset{\frown}{A'CB'} = 180^\circ - 2(65^\circ) = \boxed{50^\circ}$$

مثال۵ : در دایره ی $C(O,R)$، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی اند. خط BC دایره را در نقطه ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC، متساوی الساقین است.



پاسخ:

طبق فرض مسئله، داریم: $AB = AC$. پس $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و داریم:

$$\hat{B} = \hat{C} \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \\ \text{زاویه ی ظلی } \widehat{DAC} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \end{array}\right\} \xRightarrow[(*)]{\text{طبق}} \widehat{DAC} = \hat{C} \Rightarrow DC = DA$$

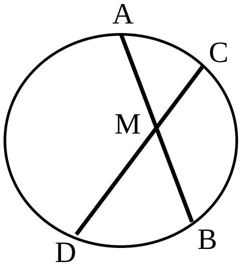
بنابراین مثلث ADC متساوی الساقین است.

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

در این بخش قضیه هایی از دایره که طول پاره خط ها نقش اصلی را در آن ها دارند، بیان خواهد شد.

قضیه ی وترها:

هرگاه دو وتر دلخواه مانند AB و CD یکدیگر را در نقطه ای درون دایره مانند M قطع کنند، آنگاه داریم:

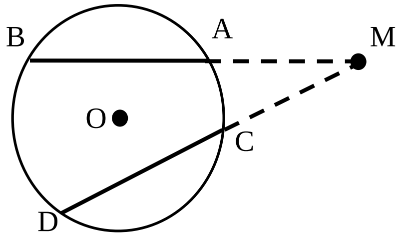


$$AM \times BM = CM \times DM$$

قضیه ی امتداد وترها:

هرگاه امتداد دو وتر دلخواه مانند AB و CD از دایره ی C یکدیگر را در نقطه ی M قطع کنند، آنگاه داریم:

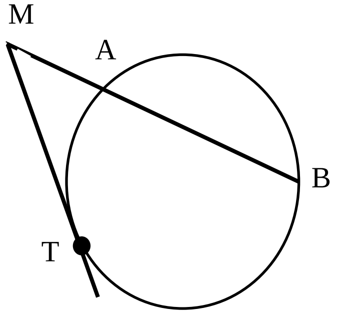
$$MA \times MB = MC \times MD$$



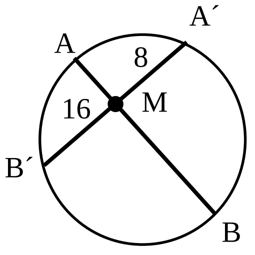
قضیه ی مماس و قاطع:

هرگاه از یک نقطه خارج دایره مانند M، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم، طول قطعه ی مماس، واسطه ی هندسی بین دو قطعه ی قاطع است. یعنی:

$$\mathrm{MT}^2 = MA \times MB$$



مثال ۱: در دایره ی مقابل، وتر AB، وتر $A'B'$ به طول ۲۴ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 30$ باشد، آن گا وتر $A'B'$ ، وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟



پاسخ:

$$\frac{A'M}{MB'} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{A'M}{MB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'M = 8 \Rightarrow MB' = 16$$

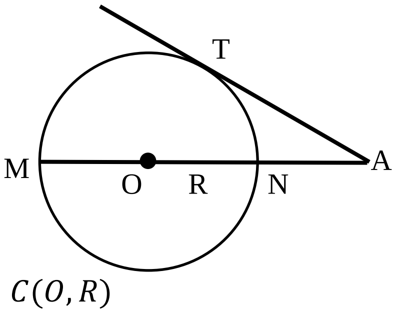
طبق قضیه ی روابط طولی برای وترهای متقاطع در درون دایره داریم:

$$AM \times MB = A'M \times MB' \quad (1)$$

$$AM = AB - MB \Rightarrow AM = 30 - MB \quad (2)$$

$$MB(30 - MB) = 8 \times 16 = 128 \Rightarrow MB^2 - ۳۰MB + 128 = 0$$

مثال۲: کم ترین و بیش ترین فاصله ی نقطه ی A از محیط دایره ی $C(O,R)$ برابر ۷ و ۱۳ است. طول مماسی را که از نقطه ی A بر دایره رسم می شود را مشخص کنید. (نقطه ی A خارج از دایره واقع است.)



پاسخ:

با توجه به فرض مسئله کم ترین فاصله ی نقطه ی A از محیط دایره برابر است با:

$$AN = OA - R = 7 \qquad (1)$$

بیشترین فاصله ی نقطه ی A از محیط دایره:

$$AM = OA + R = 13 \qquad (2)$$

طبق روابط (۱) و (۲) داریم:

$$OA = 10 \quad , \qquad R = 3 \quad , \qquad AN = 7 \, , \qquad AM = 13$$

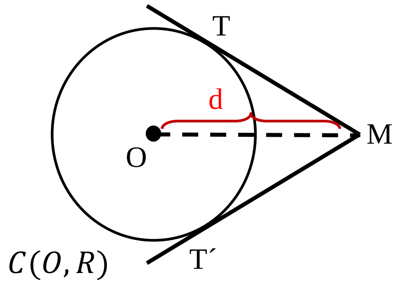
با استفاده از روابط طولی در دایره، داریم:

$$\mathrm{AT}^2 = AN \times AM = 7(13)$$

$$\mathrm{AT}^2 = 91 \quad \Rightarrow \quad \boxed{AT = \sqrt{91}}$$

ویژگی های مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن:

هرگاه از نقطه ی M خارج دایره ی $C(O,R)$ ، دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T´ نقاط تماس باشند و $OM = d$ باشد، آنگاه داریم:

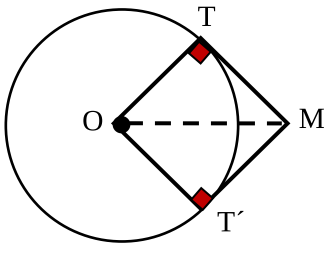


الف) اندازه های دو مماس برابرند.

ب) $MT' = MT = \sqrt{d^2 - R^2}$

ج) اگر از M به O وصل کنیم، نیم خط MO، نیمساز زاویه ی TMT´ است.

مثال۳ : دایره ی $C(O,5)$ و نقطه ی M، به فاصله ی $5\sqrt{2}$ از مرکز دایره ی C داده شده است. MT و ´MT در نقاط T و ´T بر این دایره مماس اند. طول مماس های MT و ´MT را بدست بیاورید.



پاسخ:

با توجه به مفروضات مسئله، داریم:

$OM = 5\sqrt{2}$ و $OT = OT' = R = 5$

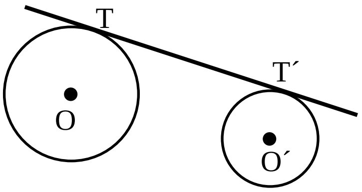
$\overset{\Delta}{OMT}:\ \widehat{OTM} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 = OM^2 - OT^2$

$MT = \sqrt{50-25} = \sqrt{25} = 5 \xRightarrow{MT=MT'} \boxed{MT' = 5}$

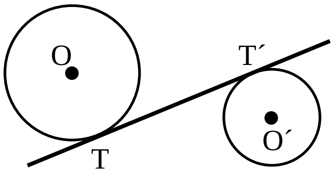
مماس مشترک:

خطی که بر هر دو دایره دلخواه مماس باشد را مماس مشترک می نامیم.

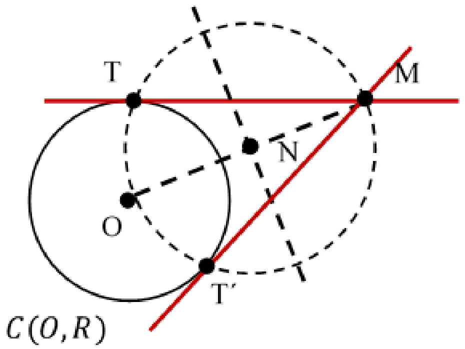
۱- مماس مشترک خارجی: **اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره می نامیم.**



۲- مماس مشترک داخلی: **اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره می نامیم.**



رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج دایره:



۱_ نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر می گیریم.

۲_ پاره خط OM را رسم می کنیم.

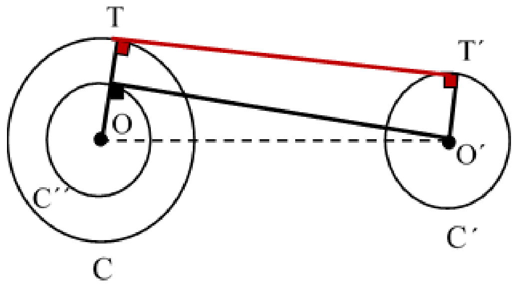
۳_ عمودمنصف پاره خط OM را رسم می کنیم تا OM را در نقطه ی N قطع کند.

۴_ به مرکز N و شعاع MN دایره ای رسم می کنیم تـا دایـره‌ی $C(O,R)$ را در نقـاط T و T´ قطع کند.

۵_ از نقطه ی M به نقاط T و T´ وصل می کنیم.

دو مماس MT و MT´ ، جواب مسئله است و توجه داریـم کـه از هـر نقطـه ی خـارج یـک دایره، فقط دو خط مماس بر آن می توان رسم نمود.

رسم مماس مشترک خارجی دو دایره دلخواه:



۱- دو دایره ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ در نظر می گیریم.

۲- به مرکز O و شعاع $R - R'$ ، دایره ای رسم می کنیم. (دایره ی C'')

۳- سپس از نقطه ی O´ مماسی را بر دایره ی C'' رسم می کنیم و نقطه ی تماس را H می نامیم.

۴- از نقطه ی O به H خطی رسم می کنیم و آن را امتداد می دهیم تا دایره ی C را قطع کند. (نقطه ی T)

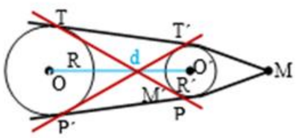
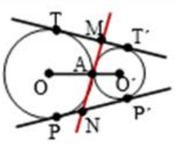
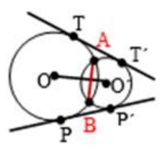
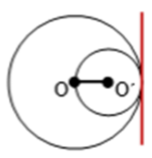
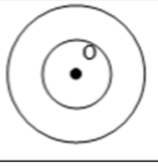
۵_ از T خطی به موازات HO´ رسم می کنیم تا دایره ی C´ را در نقطه ی T´ قطع کند.

۶- چون شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است، در نتیجه داریم:

$$O\hat{H}O' = O\hat{T}T' = 90^\circ$$

بنابراین چهارضلعی O´HTT´ مستطیل است و O´T´ و OT بر TT´ عمودند. چون دو دایره‌ی C و C´ در یک طرف خط TT´ واقع هستند. پس TT´ مماس مشترک خارجی این دو دایره می باشد.

حالت های مختلف دو دایره:

وضعیت	تعریف	شرط	تعداد مماس‌های مشترک	شکل	ویژگی
متخارج	هرگاه تمام نقاط یک دایره، بیرون دایره دیگر باشد.	$OO' > R + R'$ $(OO' = d)$	۴	 TT' , PP': مماس مشترک خارجی $T'P'$, TP: مماس مشترک داخلی	(۱) $TT' = PP'$ (۲) $TT' = PP' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$ $TP = T'P = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$ (۳) امتداد TT' و PP' و OO' در یک نقطه به هم می رسند. (۴) امتداد MD نیمساز زاویه ی TMP است. (۵) OO' نیمساز زاویه ی بین TP و $T'P'$ است.
مماس خارج (برون)	هرگاه دو دایره در یک نقطه ی مشترک باشند و دو مرکز در دو طرف این نقطه باشند.	$OO' > R + R'$	۳		(۱) $TM = MT', PN = NP'$ (۲) $TT' = MN = PP' = ۲\sqrt{RR'}$ (۳) $O\hat{M}O' = T\hat{A}T' = ۹۰^{\circ}$
متقاطع	هرگاه دو دایره فقط در دو نقطه مشترک باشند.	$\lvert R - R'\rvert < OO' < R + R'$	۲		(۱) $TT' = PP' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$ (۲) $OO' \perp AB$ عمودمنصف (۳)پاره خط AB وتر مشترک دو دایره
مماس داخل (درون)	هرگاه دو دایره در یک نقطه مشترک باشند و دو مرکز در یک طرف این نقطه باشند.	$OO' = \lvert R - R'\rvert$	۱		—
متداخل	هرگاه در دو دایره تمام نقاط یکی درون دایره دیگر باشد.	$OO' < \lvert R - R'\rvert$	۰		—
هم مرکز	هرگاه دو دایره متداخل دارای مراکز برابر باشند.	$OO' = 0$	۰		—

نکته:

به فاصله ی مراکز دو دایره، خط المرکزین می گوییم، یعنی: $d = OO'$.

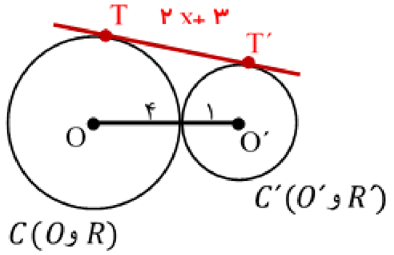
نکته:

به طور کلّی، اندازه مماس مشترک دو دایره $C(O,R)$ **و** $C'(O',R')$ **و** $OO' = d$ **به صورت زیر است:**

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

مثال۴ : دو دایره به شعاع های ۱ و ۴ سانتی متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه ی مماس مشترک خارجی آن ها برابر $2x+3$ باشد.



پاسخ:

با توجه به شکل روبه رو، داریم:

$$d = OO' = R + R' = 5$$

طبق فرمول مماس مشترک خارجی داریم:

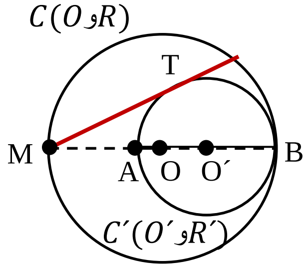
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow ۲x + 3 = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow ۲x + 3 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۲}}$$

مثال۵ : دو دایره با شعاع های ۱۸ و ۱۲ واحد مماس درونی اند. اندازه ی بزرگ ترین قطعه مماسی را که یک سر آن بر روی دایره ی بزرگ تر و سر دیگر آن (نقطه ی تماس) بر روی دایره ی کوچک تر باشد را بدست بیاورید.

پاسخ:

بزرگ ترین قطعه مماس از نقطه ی M را رسم می کنیم، چون دورترین نقطه ی دایره ی بزرگ تر تا نقاط دایره ی کوچک تر است. پس داریم:



$$MA = 2R - 2R' = 2(18) - 2(12) = 36 - 24 = 12$$

$$, \qquad MB = 2R = 36$$

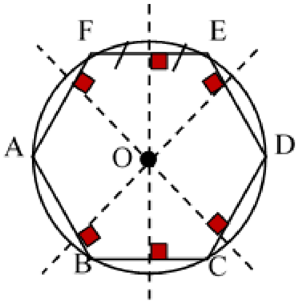
$$MT^2 = MA \times MB = 12 \times 36 \qquad \Rightarrow \qquad MT = \sqrt{12 \times 36} = \boxed{12\sqrt{3}}$$

درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چندضلعی محاطی:

چندضلعی را محاطی گوییم اگر و تنها اگر دایره ای وجود داشته باشد که از تمامی رئوس چندضلعی بگذرد. در این صورت، دایره را دایره ی محیطی آن چندضلعی می نامیم.

به عنوان مثال، شش ضلعی ABCDEF محاطی است.



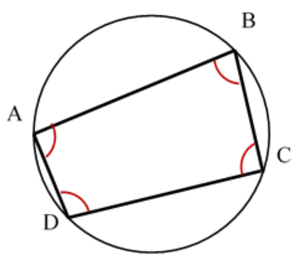
نکته:

یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف های همه ی ضلع های آن در یک نقطه همرس باشند. (این نقطه مرکز دایره ی محیطی چندضلعی می باشد.)

قضیه: **یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه ی مقابل آن، مکمل هم باشند.**

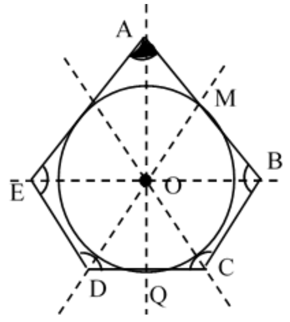
یعنی داریم:

$(\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}+\hat{D}=180^{\circ} \Leftrightarrow$ **چهار ضلعی** $ABCD$ **محاطی است**$)$



چندضلعی محیطی:

چند ضلعی را محیطی گوییم اگر و فقط اگر دایره ای وجود داشته باشد که بر تمامی ضلع های چندضلعی مماس باشد. در این صورت دایره را دایره ی محاطی این چندضلعی می نامیم. مانند پنج ضلعی ABCDE در شکل مقابل که پنج ضلعی محیطی است.



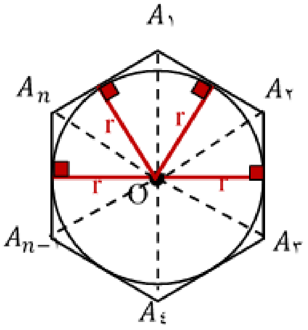
نکته:

یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه ی نیمسازهای زاویه های درونی آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره ی محاطی چندضلعی است.

مثال ۱: n ضلعی محیط با محیط ۲P و مساحت S مفروض است. اگر شعاع دایره ی محاطی برابر r باشد، نشان دهید: r=S/P

پاسخ:

اگر nضلعی محیطی $A_1A_2A_3 \dots A_n$ را با محیط ۲P و مساحت Sدر نظر بگیریم و از مرکز دایره ی محاطی به رئوس nضلعی وصل کنیم، داریم:



مساحت n ضلعی : $S = S_{\overset{\Delta}{A_1OA_2}} + S_{\overset{\Delta}{A_2OA_3}} + \cdots + S_{\overset{\Delta}{A_{n-1}OA_n}}$

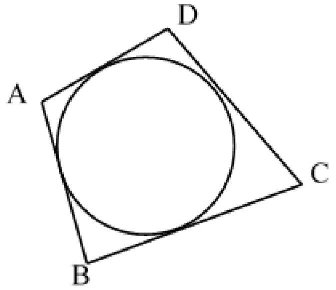
از طرفی چون مرکز دایره ی محاطی nضلعی، از اضلاع nضلعی فاصله ی یکسانی دارد، پس ارتفاع همه ی مثلث ها برابر شعاع دایره ی محاطی یعنی r می باشد.

$$S = \frac{A_1A_2 \times r}{2} + \frac{A_2A_3 \times r}{2} + \cdots + \frac{A_{n-1}A_n \times r}{2}$$

$$= \frac{r}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n) \Rightarrow S = ۲P \quad \Rightarrow \boxed{r = \frac{S}{P}}$$

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند. یعنی داریم:

(چهارضلعی $ABCD$ محیطی است $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$)



چندضلعی های منتظم:

یک چندضلعی محدب را منتظم گوییم، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز برابر باشند. به عنوان مثال، مثلث متساوی الاضلاع یک سه ضلعی منتظم و مربّع یک چهارضلعی منتظم است.

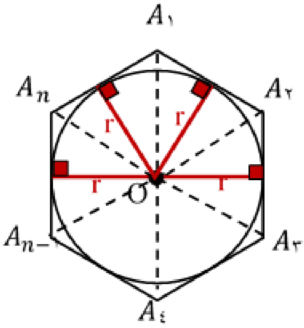
نکته :

n ضلعی های منتظم هم دایره ی محیطی دارند و هم محاطی. اگر ضلع چندضلعی منتظم a، شعاع دایره ی محیطی R و شعاع دایره محاطی r باشد، داریم:

$$a = ۲R\sin\frac{180^{\circ}}{n} \quad (۱)$$

$$a = ۲r\tan\frac{180^{\circ}}{n} \quad (۲)$$

مثال۲: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع a، مساحت دایره ی محیطی، چند برابر مساحت دایره ی محاطی است؟



پاسخ:

داریم $n = 6$ و با توجه به نکته بیان شده، می توان نتیجه گرفت:

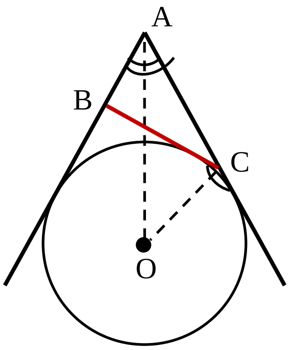
$$\begin{cases} a = ۲R\sin\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = ۲R\sin 30^\circ \Rightarrow a = ۲R \times \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = R} \\ a = ۲r\tan\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = ۲r\tan 30^\circ \Rightarrow a = ۲r \times \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{3}}{2}a} \end{cases}$$

بنابراین نسبت مساحت دایره ی محیطی به مساحت دایره ی محاطی برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت دایره ی محیطی}}{\text{مساحت دایره ی محاطی}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^2 = \left(\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\right)^2 = \frac{a^2}{\frac{3}{4}a} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

دایره ی محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث ABC :

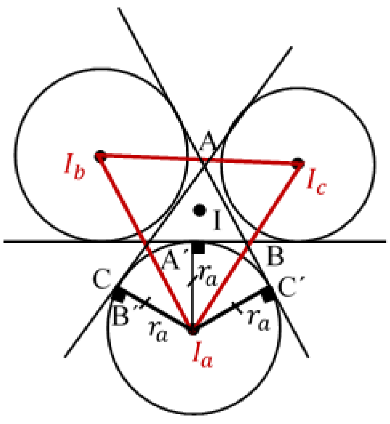
در شکل زیر، O مرکز دایره ای است که بر ضلع BC و خط های شامل دو ضلع دیگر، مماس می باشد. این دایره را دایره ی محاطی خارجی نظیر رأس A می نامیم.



برای یافتن مرکز این دایره، نیمساز A از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم می کنیم. این نیم خط، نیمساز خارجی C را در نقطه ای مانند O قطع می کند. این نقطه از خط BC و امتداد اضلاع AB و AC به یک فاصله است. پس O مرکز دایره ی محاطی خارجی نظیر رأس A است.

تعداد دایره های محاطی خارجی یک مثلث:

هر مثلث، سه دایره ی محاطی خارجی دارد. این دایره ها هر کدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث، مماس اند.



مراکز این دایره ها را با I_a ، I_b و I_c نمایش می دهیم.

به عنوان نمونه دایره محاطی خارجی به مرکز I_a را در نظر می گیریم:

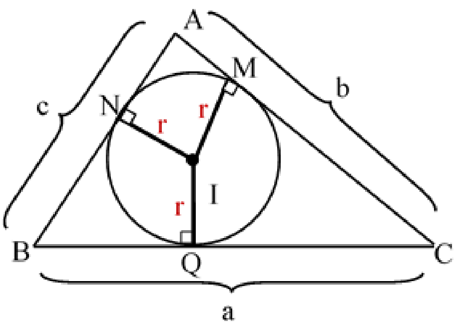
۱) مرکز این دایره، محل برخورد نیمساز داخلی زاویه ی A و نیمسازهای خارجی زاویه های B و C است.

۲) دایره محاطی خارجی به مرکز I_a و شعاع r_a است و داریم: $r_a = \frac{S}{P-a}$

۳) $AB' = AC' = P$ (P نصف محیط مثلث است.)

دایره‌ی محاطی داخلی مثلث:

مانند مطالب ذکر شده در چندضلعی محیطی، در مورد مثلث محیطی و دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث نکات زیر را داریم:

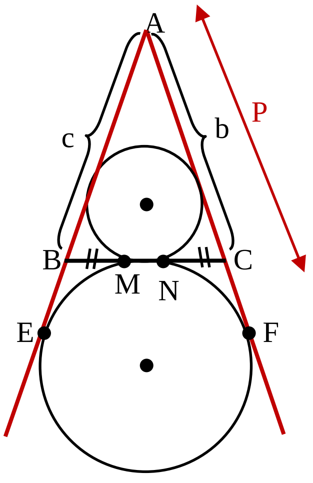


۱) $r = \frac{S}{P}$ (که S مساحت مثلث و P نصف محیط است)

۲) $AM = AN = P - a$, $BN = BQ = P - b$, $CM = CQ = P - C$

۳) I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.

مثال۳ : در مثلث ABC، $AC = 9$ و $AB = 5$ است. اگر M و N محل تماس دایره های محاطی داخلی و خارجی با ضلع BC باشند، اندازه ی MN را بدست بیاورید.



پاسخ:

می دانیم $MN = MC - NC$. پس باید مقادیر MC و NC را بدست بیاوریم.

می دانیم $CM = P - C$ و $CF = CN$ ، چون هر دو مماس هایی هستند که از نقطه ی C بر دایره ی محاطی خارجی رسم شده اند، در نتیجه داریم:

$$MN = CM - CN = (P - c) - (P - b) = b - c = 9 - 5 = 4$$

مثال۴ : مجموع مساحت های دایره های محاطی خارجی در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را بر حسب a بدست بیاورید.

پاسخ:

چون شعاع ۳ دایره، با یکدیگر برابر است، بنابراین کافی است مساحت یکی از دایره ها را بدست بیاوریم.

طبق رابطه ی شعاع دایره ی محاطی خارجی در مثلث، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} r_a = \dfrac{S}{P-a} \\ \text{مثلث متساوی الاضلاع} \qquad S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ P = \dfrac{۳a}{2} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{داریم}} r_a = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{۳a}{2} - a} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi (r_a)^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 . \frac{۳\pi}{4}$$

پس مجموع مساحت ۳ دایره، برابر است با:

$$S_{\text{کل}} = 3\, S_{\text{دایره}} = \boxed{a^2 \times \frac{۹\pi}{4}}$$


SET