جزوه کمک آموزشی نکات درس:

آمار و احتمال

(فصل اول)

مقطع تحصیلی:

دوره دوم متوسطه

پایه:

یازدهم ریاضی

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

✓ فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

➢ درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

- **منطق ریاضی**: منطق ریاضی یا منطق نمادین، دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار گرفته می شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند که درست و یا نادرست است.

- **استدلال:** یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات (مقدمات) استدلال)، و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل می شود.

مثال) اگر یک مشتری خرید بالای ۱۰۰ تومان داشته باشد، ۵ هزار تومان تخفیف به او تعلق می گیرد.

- خرید یک مشتری ۱۱۹ هزار تومان است.

نتیجه: این مشتری باید ۱۱۴ هزار تومان بپردازد.

- **گزاره:** یک جمله خبری که می تواند ارزش درست (T) یا نادرست (F) داشته باشد را گزاره می نامیم.

گزاره ها را معمولاً با نماد p، q یا r نمایش می دهیم.

مثال) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر، یک گزاره هستند.

الف) « هوا چقدر خوب است. »

ب) « حافظ بهترین شاعر ایران است. »

ج) « مسی از رونالدو قد بلندتر است. »

د) « به احتمال $\frac{۱}{۲}$، یک سکه رو می آید. »

پاسخ: موارد الف و ب یک گزاره نیستند، چون جمله الف، خبری نیست و جمله ب، دارای ارزش مشخص درست یا نادرست نیست؛ ولی جملات ج و د، یک گزاره هستند.

- **گزاره نما:** اگر جمله خبری دارای متغیر باشد که با جایگذاری عدد به جای متغیر به گزاره تبدیل شود، آن را گزاره نما می گوییم. در هر گزاره نما، به مجموعه مقادیری که می توان آن ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره نما می گوییم و آن را با نماد D نشان می دهیم.

مثال) جمله « p عددی فرد است» ، یک گزاره نما است.

ارزش های دو گزاره در کنار هم در جدول مقابل آمده است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

- **نقیض گزاره:**

اگر p یک گزاره باشد نقیض آن، گزاره ای است که ارزش آن درست عکس ارزش p باشد، نقیض گزاره p با $\sim$p نمایش داده می شود.

p	$\sim$p
د	ن
ن	د

نکته: اگر دو گزاره هم ارزش باشند، می گوییم هم ارز منطقی هستند.

مثلاً p و $\sim(\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و می نویسیم:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

- **ترکیب فصلی:**

اگر بین دو گزاره حرف ربط «یا» باشد، ترکیب فصل ایجاد می‌شود که معمولاً به صورت $p \vee q$ نمایش می دهیم و به رابط منطقی $(\vee)$، فاصل می گوییم.

«ارزش یک ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد.»

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال) برای هر دو عدد حقیقی a و b ، زمانی حاصل ضرب صفر است که a یا b صفر باشد.

$$a, b \in \mathbb{R} \ , \ \ a \times b = \cdot \Rightarrow \ \ a = \cdot \vee b = \cdot$$

- **ترکیب عطفی:** اگر بین دو گزاره حرف ربط «و» باشد، ترکیب عطفی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \wedge q$ نمایش می دهیم و به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطفی می گوییم.

«ارزش یک ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد.»

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال) برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b زمانی حاصل جمع صفر است که a و b هر دو صفر باشند.»

$$a, b \in \mathbb{R}, a, b > ۰ \quad ؛$$

$$a + b = ۰ \Rightarrow a = ۰ \wedge b = ۰$$

نکته: اگر p و q دو گزاره باشند، با تشکیل جدول ارزش گزاره ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{array}\right\} \rightarrow \text{قوانین دمورگان}$$

$$p \wedge \sim p \equiv F \quad , \quad p \vee \sim p \equiv T$$

- **ترکیب شرطی:** اگر p و q دو گزاره ساده باشند، ترکیب «اگر p آنگاه q » یک ترکیب شرطی است و به صورت «$p \Rightarrow q$» نوشته می شود که p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می نامیم.

«ارزش یک ترکیب شرطی، زمانی نادرست است که فرض درست ولی حکم نادرست است.»

p	**q**	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(❄) یک گزاره شرطی تنها زمانی نادرست است که فرض (p)، درست ولی حکم (q) نادرست باشد.

(❄❄) هرگاه ارزش p (مقدم یا فرض) در یک گزاره شرطی نادرست باشد، ارزش $p \Rightarrow q$ درست است.

در این حالت می گوییم، ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

به عنوان مثال، ترکیب شرطی «اگر ۲ فرد باشد، آنگاه ۵>۲ است» به انتفای مقدم درست است.

- **عکس ترکیب شرطی:**

گزاره ی $q \Rightarrow p$ ، عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره ی $\sim p \Rightarrow \sim q$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. با استفاده از جدول ارزش گزاره ها روابط زیر را می توان ثابت کرد:

۱) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۲) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ (قانون ادخال فاصل)

۳) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۴) $\big((p \wedge q) \Rightarrow p\big) \equiv T$ (قانون حذف عاطف)

مثال) نشان دهید ترکیب های $p \Rightarrow p\vee q$ و $p \wedge q \Rightarrow p$ همواره درست هستند.

پاسخ:

$p \Rightarrow p\vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p\vee q$	$p \wedge q$	q	p
د	د	د	د	د	د
د	د	د	ن	ن	د
د	د	د	ن	د	ن
د	د	ن	ن	ن	ن

مثال) کدام یک از گزاره های شرطی زیر همواره درست است؟

۱) $p\vee q \Rightarrow p$

۲) $p \Rightarrow p \wedge q$

۳) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۴) $p \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

پاسخ: طبق قوانین ۲ و ۴ ، یعنی $((p \Rightarrow p\vee q) \equiv T)$ و $((p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T)$ گزینه های ۱ و ۲ نادرست هستند، حال گزینه های ۳ و ۴ را ساده می کنیم.

۳) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv p \Rightarrow (p\vee q) \equiv T$

۴) $p \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q) \equiv p \Rightarrow (\sim p\vee \sim q)$

$$\equiv \sim p\vee(\sim p\vee \sim q)$$

- ## ترکیب دو شرطی:

اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را که به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می دهیم، را ترکیب دو شرطی می نامیم و معمولاً به صورت «p اگر و تنها اگر q» می خوانیم. (البته به صورت «p شرط لازم و کافی برای q است.» نیز می نامیم) و یا «اگر p آنگاه q و برعکس».

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	د

پس می توانیم بگوییم:

«ارزش یک ترکیب دو شرطی زمانی نادرست است که فرض و حکم هم ارزش باشند.»

مثال) گزاره های «۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۵>۲ باشد» و «مثلث متساوی الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه برابر داشته باشد» نمونه هایی از ترکیب دوشرطی هستند.

- **قوانین هم ارزی های منطقی:**

الف) قوانین جابه جایی:

$$\left.\begin{array}{ll} ۱) & p \wedge q \equiv q \wedge p \\ ۲) & p \vee q \equiv q \vee p \end{array}\right\}$$

ب) قوانین شرکت پذیری:

$$\left.\begin{array}{ll} ۳) & (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ ۴) & (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{array}\right\}$$

ج) قوانین پخش یا توزیع پذیری:

$$\left.\begin{array}{ll} ۵) & p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ ۶) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\}$$

د) قوانین جذب:

$$\left.\begin{array}{ll} ۷) & p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ ۸) & p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{array}\right\}$$

هـ) قانون تبدیل گزاره شرطی به فصلی:

$$۹)\ (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره ها، تمامی روابط فوق اثبات می شوند.

مثال) هم ارزی منطقی زیر با استفاده از قوانین هم ارزی اثبات نمایید.

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$$

پاسخ: از عبارت سمت چپ تساوی شروع می کنیم:

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim p \vee q) \ \text{(قانون هـ)}$$

$$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \ \text{(قانون ج)}$$

$$\equiv F \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv p \wedge q$$

- **سورها:**

به عبارت های «به ازای هر» ، «به ازای جمیع مقادیر» ، «وجود دارد» یا «به ازای برخی مقادیر» سور گفته می شود که اولی و دومی سور عمومی و موارد سوم و چهارم را سور وجودی می نامیم و به اختصار سور عمومی را با علامت $\forall$ و سور وجودی را با علامت $\exists$ نمایش می دهیم.

این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نماها آمده و گزاره های درست یا نادرست بسازند.

مثال) عبارت های زیر را معنا کنید.

الف) $\forall\, a \in E, a = ۲k, k \in O$

ب) $\exists\, b \in \mathbb{Z}, b(b + ۱) = ۲k, k \in \mathbb{Z}$

پاسخ:

الف) به ازای هر عدد زوجی مانند a ، a برابر با دو برابر یک عدد فرد است و یا به عبارت دیگر، هر عدد زوجی، دو برابر یک عدد فرد است.

ب) بعضی از اعداد صحیح مانند b هستند که $b(b+۱)=۲k$ است. به عبارت دیگر؛ حاصل ضرب بعضی اعداد صحیح در عدد بعدی آن، برابر با یک عدد زوج است.

- **نقیض گزاره های سوری:**

برای نوشتن نقیض یک گزاره سوری، فقط منفی کردن فعل جمله کافی نیست! به مثال زیر توجه کنیم:

« هر آسیایی، ایرانی است» (نادرست)

«هر آسیایی، ایرانی نیست» (نادرست)

پس هر دو گزاره بالا که هم ارزش هستند (نادرست هستند)، نمی توانند نقیض هم باشند، ولی به گزاره های زیر دقت کنیم.

« هر آسیایی ایرانی نیست» (نادرست)

«بعضی از آسیایی ها ایرانی نیستند.» (نادرست)

دو گزاره فوق نقیض هم هستند، پس برای نقیض یک گزاره سوری باید هم سور و هم گزاره بعد آن را نقیض کرد. پس:

اگر $p(x)$ یک گزاره نما باشد، نقیض گزاره ی $\forall x ، p(x)$ برابر است با $\exists x: \sim p(x)$ و به همین ترتیب، نقیض گزاره ی $\exists x: p(x)$ برابر است با $\forall x: \sim p(x)$.

نکته: نقیض سور عمومی، سور وجودی است و برعکس.

$$(۱) \quad \sim\left(\forall x ؛ \sim p(x)\right) \equiv \exists x ؛ \sim p(x)$$

$$(۲) \quad \sim\left(\exists x ؛ \sim p(x)\right) \equiv \forall x ؛ \sim p(x)$$

مثال) ارزش و نقیض گزاره های زیر را بدست بیاورید.

الف) $\forall x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴$

ب) $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^{۲} + x^{۴} = ۰$

پاسخ: الف) ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی نامساوی برقرار است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + ۳ < ۴)$$

ب) ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = ۰$ معادله برقرار است، پس مجموعه جواب معادله ی $x^{۲} + x^{۴} = ۰$ ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} :\ x^{۲} + x^{۴} = ۰) \equiv \forall x \in \mathbb{R}: x^{۲} + x^{۴} \neq ۰$$

➢ درس دوم: مجموعه – زیرمجموعه

مجموعه (یادآوری):

- **مجموعه:** دسته ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز را مجموعه می گوییم.
- **اعضای مجموعه:** عناصری که یک مجموعه را تشکیل می دهند، عضوهای آن مجموعه می نامیم. اگر a عضوی متعلق به مجموعه ی A باشد، آن را به صورت $a \notin A$ و اگر b به مجموعه ی A تعلق نداشته باشد، آن را به صورت $b \notin A$ نشان می دهیم.
- **مجموعه ی تهی:** مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه ی تهی نامیده می شود و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان داده می شود.
- **مجموعه ی مرجع:** در هر بحث معین، از اعضایی صحبت می کنیم که این اعضا متعلق به یک مجموعه ی بزرگ تر به نام مجموعه ی مرجع یا جهانی می باشند. مجموعه ی مرجع را معمولاً با U یا M نشان می دهیم.
- **زیر مجموعه:** مجموعه ی A را زیرمجموعه ی B می گوییم و می نویسیم $A \subseteq B$ ، هر گاه هر عضو A، عضو B نیز باشد. چنان چه عضوی در A وجود داشته باشد به طوریکه آن عضو در مجموعه ی B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه ی B نیست و می نویسیم $A \nsubseteq B$.

اگر $A \subseteq B$ ، ولی $A \neq B$ ، آنگاه A زیرمجموعه ی محض یا سره ی B نامیده می شود و آن را به صورت $A \subset B$ نشان می دهیم.

مثال) اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \,\big|\, |x| \leq ۱\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}: x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$ درستی یا نادرستی عبارات زیر را پیدا کنید.

الف) $A \subseteq B$ ب) $B - A \neq \emptyset$ ج) $A \cap B = \{۱\}$ د) $A - B = \emptyset$

پاسخ:

$\mathrm{A} = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| \leq ۱\right\} \Rightarrow A = \{-۱\,,۰\,,۱\}$

$B = \{x \in \mathbb{R}: x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\} \Rightarrow B = \{۱,۲\}$

الف) $A \subseteq B \ \rightarrow$ نادرست است

ب) $B - A = \{۲\} \neq \emptyset \ \rightarrow$ درست است

ج) $A \cap B = \{۱\} \rightarrow$ درست است

د) $A - B = \emptyset \ \rightarrow A - B = \{-۱,۰\}$ نادرست است

نکته: هر مجموعه ای، زیرمجموعه ی خودش است و تهی زیرمجموعه ی هر مجموعه ای است.

نکته: مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های A، مجموعه ی توانی A نامیده می شود و آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم.

نکته: تعداد زیرمجموعه های مجموعه ی A با n عضو، برابر با ۲^n است و داریم:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

$\emptyset$	تعداد زیرمجموعه های یک عضوی	تعداد زیرمجموعه های دو عضوی	تعداد زیرمجموعه های n عضوی

مثال) تعداد زیرمجموعه های مجموعه ی $A = \{\underbrace{\emptyset}_{۱}, \underbrace{۲}_{۲}, \underbrace{\{۲\}}_{۳}, \underbrace{\{۲,\{۲\}\}}_{۴}, \underbrace{۴}_{۵}\}$ که شامل ۲ باشد ولی شامل $\{۲\}$ و ۴ نباشند؟

پاسخ: این مجموعه ۵ عضو دارد و تعداد کل زیرمجموعه ها ۳۲ تاست، وقتی برای هر کدام از عضوها ۲ انتخاب داشته باشیم. اگر بخواهیم عضو ۲ را حتماً داشته باشد و عضوهای $\{۲\}$ و ۴ را حتماً نداشته باشد، برای این سه عضو هر کدام یک انتخاب و برای هر کدام از ۲ عضور دیگر، ۲ حالت انتخاب داریم:

$$\underline{۲} \quad \times \quad \underline{۲} \quad \times \quad \underline{۱} \quad \times \quad \underline{۱} \quad \times \quad \underline{۱} = \boxed{۴}$$

برای $\emptyset$ برای$\{۲,\{۲\}\}$ برای ۲   برای $\{۲\}$ برای ۴

- **افراز مجموعه:** اگر مجموعه $A \neq \emptyset$ را به زیرمجموعه های ناتهی $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ تقسیم کنیم به طوری که هیچ دو زیرمجموعه ای با هم اشتراک نداشته باشند و اجتماع آنها مجموعه A شود، در این صورت این زیرمجموعه ها را یک افراز مجموعه A می گوییم. یعنی داریم:

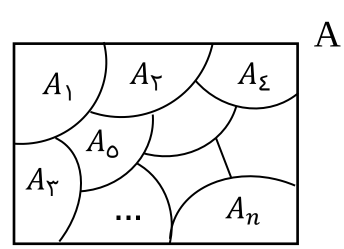
(۱) هیچ کدام از زیرمجموعه ها تهی نباشد. $(\forall\ ۱ \leq i \leq n\ ,\ A_i \neq \emptyset)$

(۲) هیچ دو زیرمجموعه اشتراکی نداشته باشند.

$(A_i\ , j\ \ (i \neq j\ , A_i \cap A_j = \emptyset)$

(۳) اجتماع همه ی زیرمجموعه های افراز، مجموعه ی اصلی را ایجاد کند.

$$(A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n) = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$$



مثال) مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ را به دو زیرمجموعه افراز کنید.

پاسخ: بیشمار افراز وجود دارد که بتوان مجموعه ی $\mathbb{N}$ را به ۲ زیرمجموعه افراز کرد که در زیر ۲ حالت آن را می نویسیم:

حالت اول:

$$\begin{cases} O = \{۱,۳,۵,\dots\} \\ \mathrm{E} = \{۲,۴,۶,۸,\dots\} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{N} = \mathrm{O} \ \cup \ \mathrm{E}$$

اجتماع مجموعه اعداد فرد و مجموعه اعداد زوج

حالت دوم:

$$\mathbb{N}_۱ = \{۱\}$$

$$\mathbb{N}_۲ = \{۲,۳,۴,\dots\} \qquad \mathbb{N} = \mathbb{N}_۱ \ \cup \ \mathbb{N}_۲$$

۱ ۳ ۷ ۵ ...	۲ ۴ ۸ ۶ ...

(حالت اول)

۱	۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ...

(حالت دوم)

نکته: روابط زیر در مجموعه ها برقرار هستند: (یادآوری)

$$(۱) \quad A \subseteq B \ , \ B \subseteq C \ \Rightarrow A \subseteq C$$

$$(۲) \quad A \subseteq B \ \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

$(۳)\quad A \subseteq B\ ,\ B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

$(۴)\quad A \subseteq B\ ,\ C \subseteq D \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \cup C \subseteq B \cup D \end{cases}$

$(۵)\quad A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B\ \wedge B \subseteq A)$

$(۶)\quad A \subseteq B \Leftrightarrow (A - B) = \emptyset$

$(۷)\quad A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap C \\ A \cup C \subseteq B \cup C \end{cases}$

$(۸)\quad A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$

- **تعریف به کمک نمادهای ریاضی در مجموعه ها (روش عضوگیری):**

الف)

$A \cup B = \{x \in U\ |x \in A \vee x \in B\}$

ب)

$A \cap B = \{x \in U\ |x \in A \wedge x \in B\}$

ج)

$A - B = \{x \in U\ |x \in A \wedge x \notin B\}$

د)

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ ,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,,(x \in A \wedge x \notin B)$$

مثال) رابطه زیر را با استفاده از روش عضوگیری دلخواه اثبات کنید.

$$A \subseteq B\,, B \subseteq C \;\Rightarrow A \subseteq C$$

پاسخ:

$$\forall x\,, x \in A \xrightarrow{A\subseteq B} x \in B \xrightarrow{B\subseteq C} x \in C \;\Rightarrow \forall x\,,(x \in A \;\Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

- **دو مجموعه مساوی:**

دو مجموعه A و B را مساوی می گوییم، هرگاه هر عضو یکی از آنها، عضو دیگری نیز باشد، به عبارت دیگر: $A \subseteq B \;,\; B \subseteq A$ و به صورت ریاضی می توان نوشت:

$$A = B \;\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

➢ درس سوم: قوانین و اعمال بین مجموعه ها

• جبر مجموعه ها:

مشابه قوانین گزاره های مرکب، برای اعمال بین مجموعه ها نیز، قوانینی وجود دارد که همگی به راحتی، به کمک روش عضوگیری دلخواه و با بهره گیری از نمودار ون اثبات می شوند.

• قوانین اعمال بین مجموعه ها:

۱) جابه جایی:

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ \mathrm{A \cup B = B \cup A} \end{cases}$$

۲) شرکت پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ \mathrm{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C} \end{cases}$$

۳) توزیع پذیری (پخشی):

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

۴) روابط مربوط به $\emptyset$, U :

$$\begin{cases} A \cap A' = \emptyset \\ A \cup A' = U \end{cases} \begin{cases} A \cup U = U \\ A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cap U = A \end{cases}$$

۵) تفاضل:

$$A - B = A \cap B'$$

۶) زیرمجموعه:

$$A \subseteq B \iff \begin{cases} B' \subseteq A' \\ A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \emptyset \end{cases}$$

۷) جذب:

$$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

۸) مجموعه های جدا از هم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$$

۹) دمورگان:

$$\begin{cases} (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ (A \cap B)' = (A' \cup B') \end{cases}$$

مثال) با استفاده از جبر مجموعه ها، درستی تساوی های زیر را اثبات کنید.

الف)

$$\mathrm{A}-(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})=(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{C}$$

ب)

$$(A-B)'\cap B'=(A'-B)$$

پاسخ:

الف)

$$\mathrm{A}-(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})\overset{(۵)}{=}\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})'\overset{(۹)}{=}A\cap(B'\cap C')$$
$$\overset{(۲)}{=}(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}')\cap \mathrm{C}'\overset{(۵)}{=}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{C}'\overset{(۵)}{=}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\mathrm{C}$$

ب)

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})'\cap \mathrm{B}'\overset{(۵)}{=}$$
$$(A\cap B')'\cap B'\overset{(۹)}{=}(A'\cup B)\cap B'\overset{(۳)}{=}(A'\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\emptyset}\overset{(۵)}{=}A'\cap B'=A'-B$$

- **ضرب دکارتی بین دو مجموعه:**

ضرب دکارتی بین دو مجموعه A و B مجموعه ای را ایجاد می کند که اعضای آن زوج مرتب هایی هستند که از اعضای A و B ساخته شده اند. به طوریکه:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \wedge y \in B\}$$

در این تعریف همیشه مؤلفه اول زوج های مرتب مربوط به مجموعه ی اول (A) و مؤلفه دوم زوج های مرتب مربوط به مجموعه دوم (B) هستند.

نکته: اگر مجموعه ی A دارای m و مجموعه ی B دارای n عضو باشند، مجموعه ی $A \times B$ ، دارای $m \times n$ عضو است.

تذکر: در حالت کلّی مجموعه ی $A \times B$ با مجموعه $B \times A$ برابر نیست. یعنی ضرب دکارتی در حالت کلّی خاصیت جابه جایی ندارد.

نکته: حاصل ضرب دکارتی $A \times A$ را با $A^۲$ نمایش می دهیم، بنابراین مجموعه ی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ رابه صورت $\mathbb{R}^۲$ نمایش می دهیم و آن را صفحه ی مختصات می نامیم.

مثال) اگر $A = \{۱,۳\}$ و $B = \{۱,۲,۴\}$ باشد، در این صورت مجموعه های $A \times B$ و $B \times A$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک را رسم کنید و با هم مقایسه کنید.

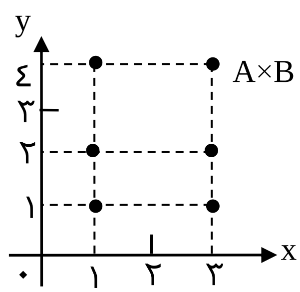
پاسخ:

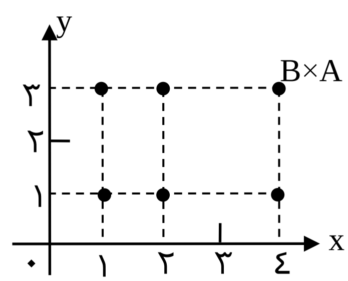
$A \times B = \{(n, y)\}x \in \{۱,۳\} \wedge y \in \{۱,۲,۴\}\}$

$A \times B = \{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۴), (۳,۱), (۳,۲), (۳,۴)\}$

$B \times A = \{(x, y)\}x \in \{۱,۲,۴\}, y \in \{۱,۳\}\}$

$B \times A = \{(۱,۱), (۱,۳), (۲,۱), (۲,۳), (۴,۱), (۴,۳)\}$

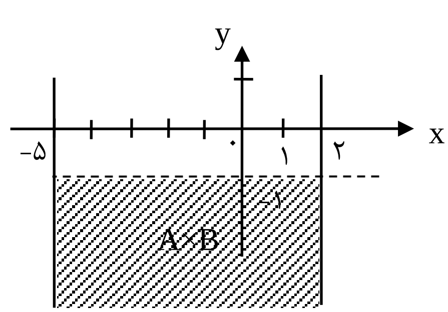




مثال) اگر $A = [-۵,۲]$ و $B = (-\infty , -۱)$ ، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.

پاسخ:

$A \times B = \{(x, y)|\ -۵ \leq x \leq ۲\ \wedge\ y < -۱\}$



نکته: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، در این صورت داریم:

۱) $\mathrm{A} \times \emptyset = \emptyset \times \mathrm{A} = \emptyset$

۲) $A \times B = B \times A \Rightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)$