ریاضی یازدهم

متوسطه دوم

(نکات و خلاصه درس)

(تمامی حقوق متعلق به مجتمع
آموزشی و پژوهشی ثمین می باشد.)

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی

معادله خط :

از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند. بنابراین با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط می توان معادله آن را به دست آورد:

$$y = mx + b$$

شیب خط :

برای نوشتن معادله یک خط به شیب خط نیاز داریم. شیب خط برابر است با نسبت تفاضل عرض دو نقطه از خط به طول همان دو نقطه از خط.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

مثال ها

۱. شیب خطی که از این دو نقطه $B\left(-1و2\right)$ و $A\left(1و0\right)$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-2}{1-(-1)} = -1$$

نکته ها

- شرط موازی بودن دو خط این است که شیب یکسانی داشته باشند.
- عرض از مبدا نقطه‌ای از خط است که محور y ها را قطع می کند. یعنی x آن صفر است.

نوشتن معادله خط :

برای نوشتن معادله یک خط به شیب خط و عرض از مبدا آن نیاز است .

اگر شیب و مختصات یک نقطه از خط را داشته باشیم معادله خط به صورت زیر به دست می آید:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

اگر شیب خط را نداشته باشیم از مختصات دو نقطه آن را به دست می آوریم. سپس در معادله خط جایگذاری می‌کنیم.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

مثال ها

۲. اگر مختصات دو نقطه $A(3,2),B(1,4)$ باشد معادله خط آن را به دست آورید.

پاسخ:

ابتدا باید شیب خط را به دست بیاوریم سپس آن را در معادله خط قرار دهیم.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-2}{1-3} = -1$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad \rightarrow y - 2 = -1(x-3) \quad \rightarrow y = -x + 5$$

- **وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:**

الف) دو خط موازی

اگر دو خط متقاطع نباشند موازی یا منطبق هستند و شیب آن ها یکسان است.

مثال ها

۳. معادله خطی بنویسید که از نقطه $A(1,2)$ بگذرد و موازی خط $y = 2x - 1$ باشد.

پاسخ:

شرط موازی بودن دو خط داشتن شیب یکسان است.شیب خط جدید برابر ۲ است.

$$y - y_A = m(x - x_A) \rightarrow y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x$$

ب) دو خط متقاطع

اگر دوخط l_2,l_1 همدیگر را در یک نقطه قطع کنند آنگاه آن دو خط متقاطع هستند.

برای به دست آوردن مختصات نقطه تقاطع دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c_1 = 0 \\ ax_2 + bx_2 + c_2 = 0 \end{cases}$$

مثال ها

۴. نقطه تقاطع دو خط زیر رابه دست آورید.

$l_1 : y = 2x - 1$

$l_2 : y = x + 3$

پاسخ:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 2x = -1 \\ y - x \quad = 3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -y + 2x = 1 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$x = 4 , y = 7$

نکته ها

اگر شیب دو خط l_1 و l_2 برابر m_1 و m_2 باشند و $m_1m_2 = -1$ آنگاه دو خط بر هم عمودند.

به عبارتی دیگر، شیب دو خط عمود برهم، قرینه و معکوس یکدیگرند.

مثال ها

۵. معادله خطی بنویسید که از نقطه $A(1,3)$ بگذرد و بر خط زیر عمود باشد.

$l_1 : y = 2x - 1$

پاسخ:

$$m_1m_2 = -1 \quad \rightarrow \mathrm{m} \times 2 = -1 \rightarrow \mathrm{m} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{y} - \mathrm{y_A} = \mathrm{m}(\mathrm{x} - \mathrm{x_A}) \quad \rightarrow \mathrm{y} - 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

فاصله دو نقطه :

اگر دو نقطه مورد نظر A و B دارای عرض‌های یکسانی باشد، آنگاه فاصله بین آن‌ها از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$|AB| = |x_A - x_B|$$

ولی اگر عرض یکسانی نداشته باشد برابر است با :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال ها

۶. فاصله دونقطه $B(4,2)$ و $A(1,0)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$$

مختصات نقطه وسط پاره‌خط :

- اگر دو نقطه $B(x_B,y_B)$ و $A(x_A,y_A)$ روی محور y باشند، نقطه وسط پاره خط برابر است با:

$$y = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- اگر دو نقطه $B(x_B,y_B)$ و $A(x_A,y_A)$ روی محور x باشند نقطه وسط پاره خط برابر است با:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

- اگر دو نقطه $B(x_B,y_B)$ و $A(x_A,y_A)$ دلخواه باشند نقطه وسط پاره خط برابر است با:

$$m = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

مثال ها

۷. اگر $A(1,2), B(5,4)$ باشد مختصات نقطه وسط پاره خط را به دست آورید.

پاسخ:

$$m = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (3,3)$$

فاصله نقطه از خط :

فاصله نقطه $A(x_A,y_A)$ **از خط** $ax + by + c = 0$ **برابر است با :**

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ها

۸. فاصله نقطه $A(2,-1)$ **از خط** $y = 2x + 1$ **را به دست آورید.**

پاسخ :

$$2x - y + 1 = 0$$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{[2 \times 2 + (-1)(-1) + 1]}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

فاصله دو خط موازی :

برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی، فاصله یک نقطه روی یکی از خط ها را تا خط دیگر به دست می آوریم.

مثال ها

۹. فاصله دو خط موازی زیر را به دست آورید.

$l_1 : y = 2x - 3$

$l_2 : y = 2x + 5$

پاسخ:

$x = 2 \rightarrow y = 2 \times 2 - 3 = 1 \qquad (2,1)$

$l_2 : 2x - y + 5 = 0$

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 2 + (-1)1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 1 + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

درس دوم : معادله درجه دوم و تابع درجه۲

معادله درجه دوم :

هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ را معادله درجه دو گوییم. هرگاه $(a \neq 0)$ باشد.

معادلات درجه دو را می‌توان با روش‌های زیر حل کرد:

الف) مربع کامل

ب) تجزیه

ج) ریشه گیری

د) با استفاده از دلتا

روش مربع کامل :

در روش مربع کامل با توجه به ضریب x^2 و ضریب x می‌توان آن را به معادله درجه دو تبدیل کرد.

مثال ها

۱۰. معادله زیر را با استفاده از مربع کامل حل کنید.

$$x^2 + 2x = 0$$

پاسخ:

به هردو طرف معادله ۱ اضافه می‌کنیم تا معادله به معادله زیر تبدیل شود.

$$x^2 + 2x + 1 = 1 \rightarrow (x+1)^2 = 1$$

$$x + 1 = \pm 1 \quad \rightarrow x = 0\,, x = -2$$

برای تبدیل معادلات درجه دو به معادلات مربع کامل از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$x^2 + bx = 0 \ \rightarrow x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

روش تجزیه :

در این روش معادله درجه دو را به ضرب دو معادله تبدیل کرده و سپس آن را حل می‌کنیم.

مثال ها

۱۱. معادله درجه دو زیر را با استفاده از روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

پاسخ:

$$x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) \rightarrow x = -1\,, x = -4$$

روش ریشه گیری :

در این روش با استفاده از ریشه گرفتن معادله درجه دو را حل می‌کنیم.

$$x^2 = +\propto \ \rightarrow x = \mp\sqrt{\propto}$$

مثال ها

۱۲. معادله زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

$$x^2 - 1 = 0$$

پاسخ:

$$x^2 = 1 \quad \rightarrow x = \pm 1$$

روش دلتا :

در این روش می‌توان تمام معادلات درجه دومی را که قابل حل هستند به دست آورد.

اگر معادله درجه دوم به صورت زیر باشد.

$$x^2 + bx + c = 0$$

داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد.

اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه معادله یک ریشه مضاعف دارد.

برای به دست آوردن مقادیر ریشه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر β, $\propto$ ریشه‌های معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ باشد آنگاه روابط زیر برقرار است:

مجموع ریشه ها $\propto + \beta = -\frac{b}{a}$

ضرب ریشه ها $\propto \times \beta = \frac{c}{a}$

اگر β, $\propto$ ریشه معادله درجه دو $x^2 + bx + c = 0$ باشند و S مجموع ریشه‌ها و p ضرب ریشه‌ها باشد، روابط زیر برقرار است:

$x^2 - sx + p = 0$

- **اگر جمع ضرایب معادله درجه دو $(a + b + c)$ برابر با صفر شود، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است .**
- **اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.**

مثال ها

۱۳. اگر α, β ریشه معادله درجه دو $x^2+7x+1=0$ باشند .حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

پاسخ :

$s=-7\,,p=1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha\,\beta}+\frac{\alpha}{\alpha\,\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\,\beta}=\frac{-7}{1}=-7$$

$$\alpha^2+\beta^2$$

پاسخ :

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\,\alpha\,\beta=(-7)^2-2(1)=49-2=47$$

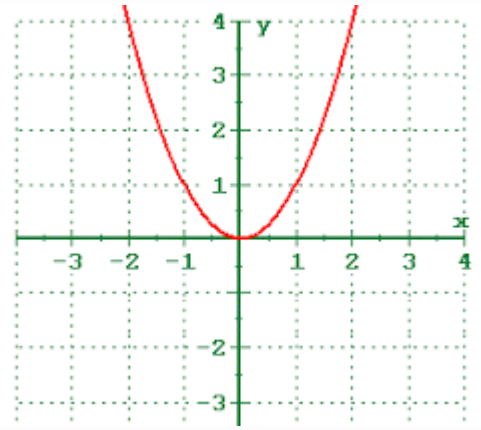
تابع درجه دوم :

اگر معادله درجه دوم ما به صورت زیر باشد :

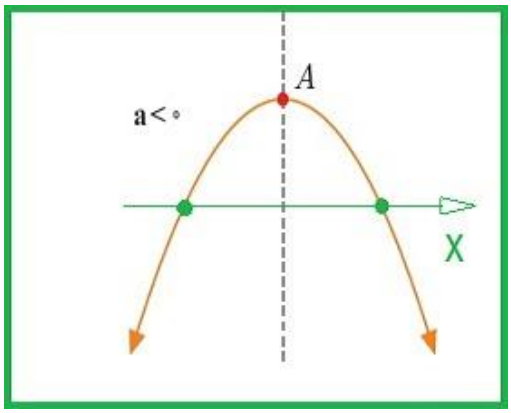
$$y = x^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

نمودار آن به صورت سهمی است .

اگر $a > 0$ باشد آنگاه سهمی دارای مینیمم است و دهانه سهمی روبه بالا است.



اگر $a < 0$ باشد آنگاه سهمی دارای ماکزیمم است و دهانه آن رو به پایین است.



توجه: در یک سهمی اگر عرض دو نقطه برابر باشند، آن دو نقطه دارای طول قرینه هستند.

مثال ها

۱۴. آیا تابع زیر دارای ماکزیمم است؟

$$y = 2x^2 + x + 23$$

پاسخ:

خیر. برای اینکه یک تابع دارای ماکزیمم باشد باید a<0 باشد. ولی در اینجا a مثبت است و دارای مینیمم است.

صفرهای معادله درجه دو :

نقاط برخورد نمودار با محور x را صفرهای معادله گوییم و آن را با استفاده از دلتا حل می‌کنیم.

برای نوشتن معادله سهمی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$y = a(x - \propto)(x - \beta)$$

مثال ها

۱۵. اگر ریشه‌های معادله درجه $(1,0), (4,0)$ و نقطه $A(0,1)$ معدر معادله صادق باشد دومی ادله سهمی را بنویسید.

پاسخ:

$$y = a(x-1)(x-4)$$

با توجه به اینکه A در معادله سهمی صادق است، پس جای x آن صفر و جای y آن یک قرار می‌دهیم.

$$1 = a(0-1)(0-4) \ \rightarrow a(4) = 1 \ \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

با به دست آوردن a معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{4}(x-1)(x-4) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 4)$$

پیداکردن نقطه رأسی نموداردرجه دو :

اگرنقطه راسی تابع $ax^2 + bx + c = 0$ به نام x باشد، مختصات آن به صورت زیر است.

$$X = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

مثال ها

۱۶. نقطه راسی سهمی تابع زیر را به دست آورید.

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

پاسخ:

$$x = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{-12}{4}\right) = (-2, -3)$$

علامت ضرایب سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار:

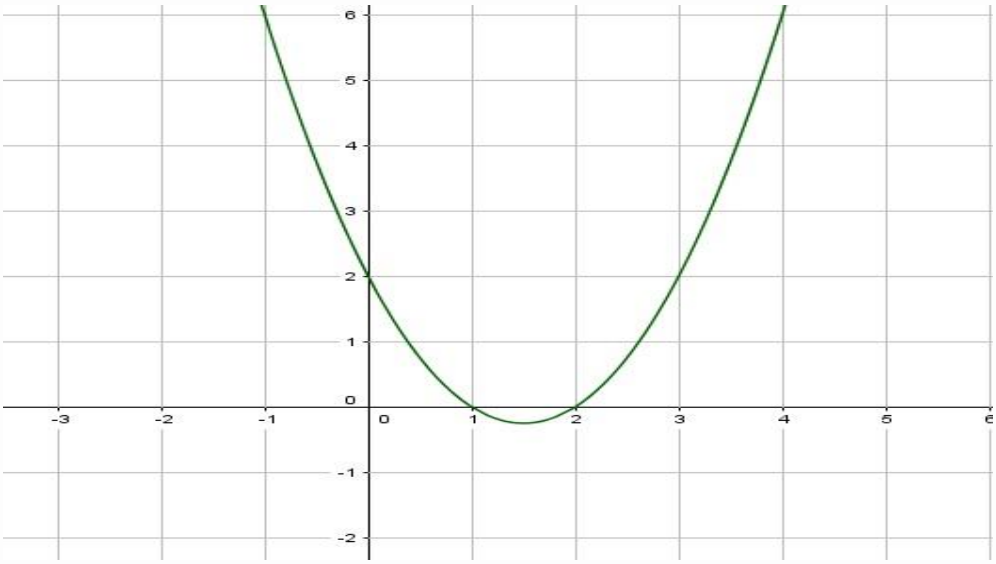
a: با نگاه به شکل سهمی می توان علامت a را مشخص کرد اگر دهانه سهمی به سمت بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد $a < 0$ است.

b : طول راس سهمی برابر با $x = -\frac{b}{2a}$ است که با توجه به x,a می‌توان علامت b را مشخص کرد.

c : محل برخورد سهمی با محورy ها است و از روی نمودار، علامت آن مشخص است.

مثال ها

۱۷. علامت ضرایب تابع درجه دو را از روی نمودار به دست آورید.



پاسخ:

چون دهانه سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$

نمودار محور مختصات را در $y = 2$ **قطع می کند پس** $c > 0$

راس سهمی عددی بین ۱و۲ است، پس مثبت است و چون $a > 0$ **پس** $b < 0$.

درس سوم: معادله گویا و معادلات رادیکالی

معادلات شامل عبارات گویا :

معادلاتی که صورت ومخرج آن‌ها چندجمله ای باشند عبارات گویا نامیده می شود.

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم.

جواب به دست آمده نباید مخرج کسر را صفر کند.

مثال ها

۱۸. معادلات گویا زیر را حل کنید .

$$1)\ \frac{x+3}{x-1} = x$$

پاسخ:

$$(x+3) = (x+1)(x)$$

$$x + 3 = x^2 + x \quad \rightarrow x^2 = 3 \quad \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$2)\ \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$$

پاسخ:

کوچکترین مضرب مشترک $x\ (x^2\text{-}4)$ **است، آن را در صورت و مخرج تمامی کسرها ضرب می‌کنیم.**

$$3 \times (x) \times (x-2)\ +\ 2 \times (x+2) \times (x-2) =\ x(4x-4)$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2\ - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = -2\,, x = 4$$

x=-2 **قابل قبول نیست، چون مخرج را صفر می کند.**

معادلات رادیکالی :

برخی از معادلات که شامل عبارات رادیکالی از مجهول هستند را معادلات رادیکالی می‌گویند. برای حل آن‌ها از به توان رساندن طرفین معادله و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می کنیم، جواب به دست آمده باید آزمایش شود.

مثال ها

۱۹. معادله گنگ زیر را حل کنید.

$$2+\sqrt{1+x}=x-3$$

پاسخ :

$$\sqrt{1+x}=\mathrm{x}-5$$

$$1+\mathrm{x}=x^2-10\mathrm{x}+25$$

$$x^2-11x+24=0$$

$$(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}-8)=0\rightarrow \mathrm{x}=3\,,8$$

آزمایش جواب ها:

$x=3\rightarrow\sqrt{1+3}\neq 3-5$ قابل قبول نیست

$x=8\rightarrow\sqrt{1+8}=8-5$ قابل قبول است

بانک محتوای آموزشی SET

آسان و سریع مطالب مهم را مرور کنید و برای آزمون آماده شوید.

همین الان کلیک کن

ویدئو آموزشی

با ویدئوهای کوتاه درس به درس، مطالب درس را آسان و سریع یاد بگیرید.

خلاصه نکات

با خلاصه نکات درس به درس فقط به نکات مهم بهردازید و زمان را ذخیره کنید.

نمونه‌سوالات حل شده

با نمونه سوالات حل شده درس به درس، متال‌های مهم را ببینید و مفاهیم را آسان درک کنید.

دوره‌های آموزشی

با دوره‌های آموزشی وارد مسیر یادگیری شوید و گام به گام خود را در کل درس راحت کنید.

set.ir

www.youtube.com/@saminskill

www.aparat.com/set_ir_official

www.instagram.com/set.ir.shop

t.me/set_ir_levelup

@set_ir_levelup

@levelupset

۰۲۱۴۴۰۷۰۷۳۰

۰۹۰۲۷۱۴۳۴۰۲

اسکن کنید