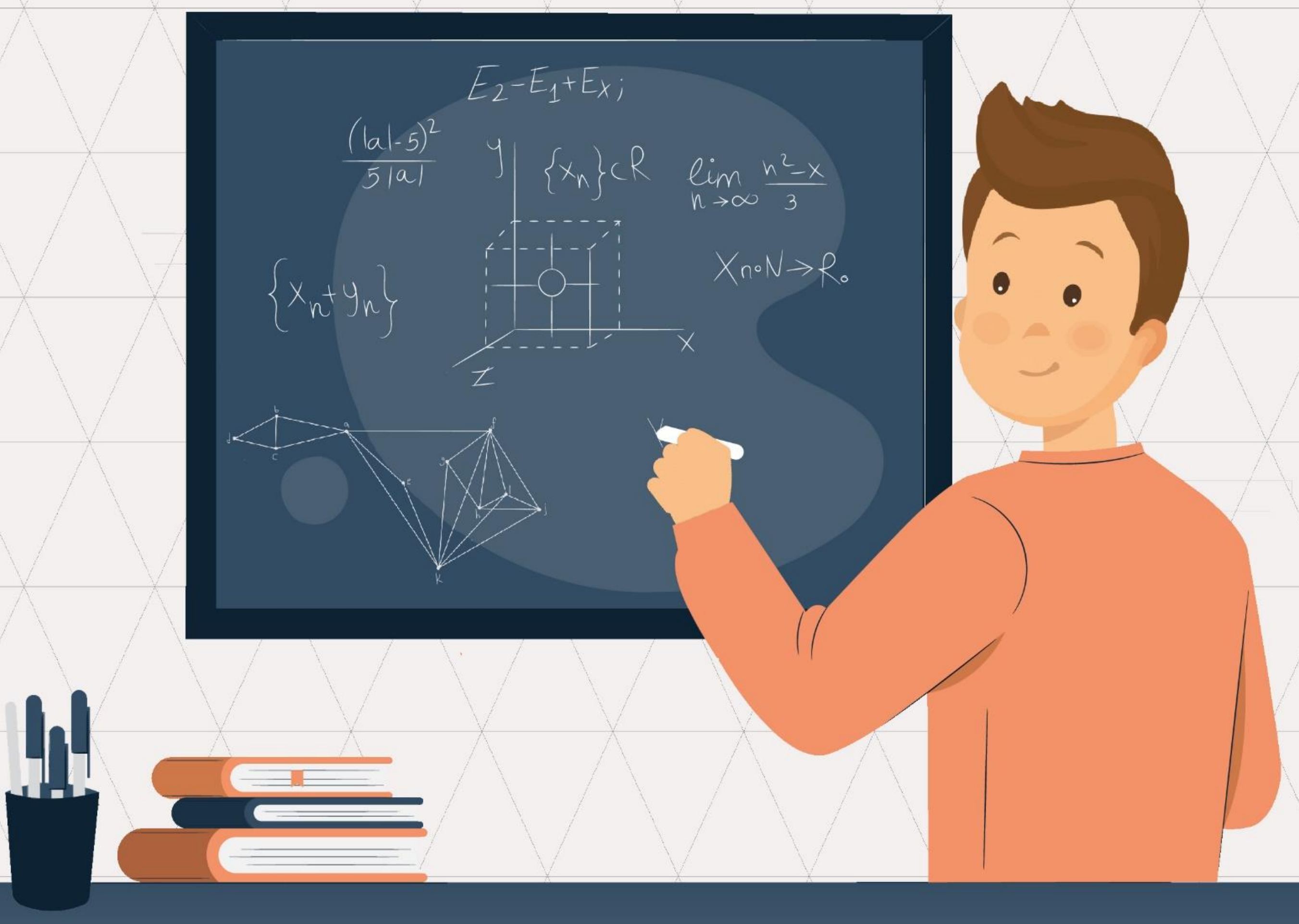
ریاضیات گسسته دوازدهم ۱۲

متوسطه دوم

(نکات و خلاصه درس)



فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

درک و فهم ریاضی بدون استدلال امکان پذیر نمی باشد و آموزش ریاضی را محدود به حفظ کردن خواهد کرد. هدف از این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات ریاضی است .

روش‌های اثبات:

۱. مثال نقض : برای رد یک حکم کلی، از مثال نقض استفاده می‌شود. اگر گزاره‌ای به صورت کلی بیان شود، ارائه حتی یک مثال که در آن گزاره نادرست باشد، کافی است تا حکم کلی رد شود.

– مثال: اگر گزاره‌ای بگوید "همه اعداد فرد اول هستند"، عدد ۹ یک مثال نقض است، زیرا فرد است ولی اول نیست.

۲. اثبات با مثال : ارائه مثال برای اثبات درستی یک گزاره کلی کافی نیست. حتی اگر نتوانیم مثال نقضی پیدا کنیم، این به معنای درستی گزاره نیست.

– مثال: گزاره‌ای مانند "هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است" (حدس گلدباخ) هنوز اثبات نشده، ولی مثال‌های زیادی آن را تأیید می‌کنند.

۳. اثبات مستقیم : برای اثبات درستی یک گزاره، می‌توان از استدلال منطقی استفاده کرد.

– مثال: برای اثبات اینکه مجموع سه عدد متوالی طبیعی مضرب ۳ است، داریم:

$$n + (n+۱) + (n+۲) = ۳n + ۳ = ۳(n+۱)$$

که نشان می‌دهد مجموع این سه عدد همیشه مضرب ۳ است.

نتیجه:

– مثال نقض برای رد حکم کلی.

– اثبات با مثال کافی نیست.

– اثبات مستقیم نیاز به استدلال منطقی دارد.

اثبات با مثال نقض :

به مثالی که کلیت یک حکم را باطل می‌کند مثال نقض می‌گویند.

اگر بتوان با یک مثال حکم کلی را رد کرد آن استدلال با کمک مثال نقض است .

– مثال: آیا گزاره"عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی، عددی اول است" صحیح است؟

پاسخ: اگر $n = ۵$ را در نظر بگیریم

$۲^{۲^۵} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$

به وضوح حاصل یک عدد اول نیست چون که به صورت حاصلضرب دو عدد (به غیر از خودش و یک) نوشته شده است.

اثبات مستقیم :

اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت ها

– **مثال:** ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ; $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

پاسخ: اگر n زوج باشد به عبارت دیگر $n=2k$ در این حالت داریم :

$$n^۲ - ۵\mathrm{n} + ۷ = (۲\mathrm{k})^۲ - ۵(۲K) + ۷ = ۴\mathrm{k}^۲ - ۱۰\mathrm{k} + ۶ + ۱$$

$$= ۲(۲\mathrm{k}^۲ - ۵\mathrm{k} + ۳) + ۱$$

که حاصل عددی فرد است .

اگر n عددی فرد باشد یعنی $n=2k-1$. در این حالت داریم:

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k - ۱)^۲ - ۵(۲k - ۱) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۳$$
$$= ۲(۲k^۲ - ۷k + ۶) + ۱$$

که باز هم عددی فرد است.

اثبات غیر مستقیم: (اثبات به روش برهان خلف)

فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از گزاره ها و قوانین به یک نتیجه غیرممکن یا تضاد می‌رسیم و از آنجا نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود.

– مثال: ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

پاسخ: فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر است و x عددی گنگ است ولی rx عددی گویا (برهان خلف) باشد. می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد گویا، عددی گویا است. معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست.

بنابراین: $(\frac{1}{r})\ (r.x) \in Q$ یا $(\frac{1}{r}\, r)x \in Q$

از آنجا که $x \in Q$ که با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم درست است.

اثبات های بازگشتی / گزاره های هم ارز :

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آن‌ها را گزاره‌های هم ارز می‌نامیم.

$p \Leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \Leftrightarrow p$

$p \Leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow q$

– **مثال:** **ثابت کنید اگر $a > 0$ باشد، آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$**

پاسخ:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

گزاره همیشه درست است.

– **مثال:** **برای اثبات گزاره " اگر a و b دوعدد مثبت باشند، آنگاه $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ است"،**

به روش بازگشتی، در نهایت به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم.

پاسخ: **با توجه به هم ارز بودن دو گزاره در عبارت دو شرطی داریم:**

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

درس دوم : بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تساوی $۳ \times ۵ = ۱۵$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵ از سه دسته ۵ تایی تشکیل شده‌است یعنی در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است پس می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵ ، عدد ۱۵ را می‌شمارد (عاد می کند)، چون می توان ۱۵ را با دسته‌های ۵تایی شمرد. این شمارش یا عاد کردن را در ریاضی با علامت "|" نشان می‌دهند و می‌نویسند ۵|۱۵.

مفهوم بخش‌پذیری و علامت"|" :

در ریاضی، وقتی می‌خواهیم بررسی کنیم که یک عدد، عدد دیگری را "عاد" می‌کند یا به‌عبارتی، بدون باقی‌مانده بر آن تقسیم می‌شود، از علامت "|" استفاده می‌کنیم. به این معنی که اگر عدد A بر عددB بدون باقی‌مانده تقسیم شود، می‌نویسیم:

$B|AB$ و $A|AB$

که می‌خوانیم A عدد B را عاد میکند یا B بر A بخش پذیر است.

گروه‌بندی مهره‌ها :

فرض کنید ۱۵ مهره رنگی داریم و می‌خواهیم آن‌ها را به دسته‌های ۵تایی تقسیم کنیم. اگر بتوانیم مهره‌ها را طوری دسته‌بندی کنیم که در هر دسته دقیقاً ۵ تا باشد و هیچ مهره‌ای باقی نماند، یعنی ۱۵ کاملاً بر ۵ بخش‌پذیر است.

حالا اگر مهره‌ها را یکی‌یکی داخل گروه‌های ۵ تایی بگذاریم:

- اولین گروه: ۵ مهره
- دومین گروه: ۵ مهره
- سومین گروه: ۵ مهره

همه ۱۵ مهره تمام شدند و هیچ مهره‌ای اضافه نیامد. پس می‌گوییم ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است و می‌توانیم این را به‌صورت زیر بنویسیم:

۵|۱۵

یعنی ۵ عدد ۱۵ را عاد می‌کند.

– قرار دادن تعداد شی در دسته‌های مساوی با دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را بدون آنکه باقی مانده‌ای داشته‌باشیم را **عاد کردن** یا شمارش آن اشیا توسط شمارنده‌ها می‌گویند.

- در ریاضیات، می‌گوییم عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش‌پذیر است، اگر عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$b = aq$$

در این حالت، عدد b را "شمارنده" یا "عاد کننده" عدد a می‌نامیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

b|a و می‌خوانیم b، a را عاد میکند یا b بر a بخش‌پذیر است.

اما اگر چنین عددی q وجود نداشته باشد و a بر b بخش‌پذیر نباشد، می‌نویسیم:

$b \nmid ab$

- مثال: می‌توان ۱۸ شی را با شمارنده‌های ۱،۲،۳،۶،۹،۱۸ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

مثلا می نویسیم ۹|۱۸ و می خوانیم عدد ۹ عدد ۱۸ را عاد می‌کند.

نکته: اگر a عددی طبیعی باشد، آن‌گاه داریم: ۱|a و a|a

ویژگی های رابطه عاد کردن :

ویژگی ۱) $a|b \Rightarrow a|mb$ **(اگرعدد a عدد b را عاد کند آن‌گاه مضرب صحیح b را می-شمارد)**

ویژگی ۲) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

ویژگی ۳) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

ویژگی ۴) اگر $a|b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$ **در نتیجه** $a|b \wedge b|a \Rightarrow a = \pm b$

(اثبات ویژگی ها در کتاب)

تذکر: با توجه به ویژگی‌های بالا اگر $a|b$**، آنگاه:** $a^n|b^n$

نکته: $a|b$ و $a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$

عدد اول:

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده‌ی مثبتی به جز یک و خودش نداشته-باشد، عدد اول نامیده می‌شود. "در واقع هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که مقسوم‌علیه به غیر از یک و خودش نداشته باشد یا به عبارتی بر هیچ عددی به غیر از خودش و یک بخش‌پذیر نباشد را عدد اول گویند." مجموعه اعداد اول که ثابت شده‌است مجموعه ای نامتناهی $p = \{۲و۳و۵و۷و۱۱و ...\}$ نمایش داده می‌شود.

نتیجه: اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و a|p، آنگاه : a=1 یا a=p

_مثال مهم: اگر عدد طبیعی a دو عدد (۷ + k ۹) و (۶ + k ۷) را عاد کند، ثابت کنید:

$a = ۵$ یا $a = ۱$

پاسخ: ابتدا هر عبارت را در ضریب k عبارت دیگر ضرب می‌کنیم:

$$a|(۹k + ۷) \rightarrow a|۶۳k + ۴۹$$
$$a|(۷k + ۶) \rightarrow a|۶۳k + ۵۴$$

$$a|۶۳k + ۵۴ - (۶۳k + ۴۹)$$

$$a|۵ \rightarrow a = ۵ \text{ یا } a = ۱$$

بزرگ ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد :

d ب‌م‌م دو عدد صحیح و ناصفر a و b است { d= (a,b) }، اگر و تنها اگر:

$$d|a \ \wedge d|b$$

$$\forall m > \cdot : m|a \wedge m|b \Rightarrow m \leq d$$

نکته: اگر $۱ = \left(a \text{ و } b\right)$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول اند.

_مثال: ب م م دو عدد ۷۲ و ۶۰ را بیابید.

پاسخ: مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۷۲ :

$$۷۲ = \left\{۱\text{و}۲\text{و}۳\text{و}۶\text{و}۸\text{و}۹\text{و}۱۲\text{و}۱۸\text{و}۲۴\text{و}۳۶\text{و}۷۲\right\}$$

مجموعه مقسوم علیه های ۶۰ :

$$۶۰ = \left\{۱\text{و}۲\text{و}۳\text{و}۴\text{و}۵\text{و}۶\text{و}۱۰\text{و}۱۲\text{و}۱۵\text{و}۲۰\text{و}۳۰\text{و}۶۰\right\}$$

از بین شمارنده‌های طبیعی مشترک دو مجموعه، ۱۲ از همه بزرگ‌تر است.

راه بهتر:

عددها را تجزیه می کنیم و عامل مشترک را با توان کوچکتر در هم ضرب می کنیم .

$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \text{ و } ۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ \ \Rightarrow \left(۶۰\text{و}۷۲\right) = ۲^۲ \times ۳$$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد:

c ک‌م‌م دو عدد صحیح و ناصفر a و b است $\{c = [a \text{ و } b]\}$، اگر و تنها اگر:

a|c ∧ b|c

$\forall m > ۰ \ \wedge \ \ a|m \text{ و } b|m \Rightarrow c \leq m$

_مثال: ک‌م‌م دو عدد ۷۲ و ۶۰ ؟

پاسخ: ضرب عامل های مشترک با توان بیشتر درعامل های غیر مشترک $= [۷۲ \text{ و } ۶۰]$

$۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$

قضیه تقسیم و کاربردها :

وقتی یک عدد را بر عدد دیگری تقسیم می‌کنیم، ممکن است کاملاً بخش‌پذیر باشد (یعنی باقی‌مانده صفر شود) یا ممکن است عددی باقی بماند که دیگر قابل تقسیم بر عدد دوم نباشد .قضیه تقسیم دقیقاً همین موضوع را توضیح می‌دهد و نشان می‌دهد که هر عدد صحیح را می‌توان به شکلی مشخص تقسیم‌بندی کرد.

بیان ساده‌ی قضیه تقسیم:

فرض کنید که یک عدد a را بر عدد b تقسیم می‌کنیم. این تقسیم دو حالت دارد:

۱. **اگر a کاملاً بر b بخش‌پذیر باشد، یعنی باقی‌مانده صفر شود، می‌گوییم که b عدد a را "عاد" می‌کند.**

۲. **اما اگر تقسیم انجام شود و عددی باقی بماند، یعنی عدد a به‌طور کامل در b جا نشود، در این صورت، یک مقدار اضافه باقی می‌ماند که از عدد b کوچک‌تر است.**

به زبان ساده، هر عدد صحیح را می‌توان به شکل مجموع یک عدد دیگر و یک باقی‌مانده‌ی کوچک‌تر از آن نوشت.

درک بهتر با یک مثال ساده در صفحه بعد:

_مثال: فرض کنیم که ۲۳ شکلات داریم و می‌خواهیم آن‌ها را در بسته‌های ۵ تایی قرار دهیم:**

پاسخ:

- **اولین بسته ۵ شکلات**
- **دومین بسته ۵ شکلات**
- **سومین بسته ۵ شکلات**
- **چهارمین بسته ۵ شکلات**
- **بعد از قرار دادن ۲۰ شکلات در ۴ بسته، هنوز ۳ شکلات باقی می‌ماند.**

نتیجه چیست؟ ما توانستیم ۲۳ شکلات را در ۴ بسته‌ی ۵ تایی قرار دهیم و ۳ شکلات باقی ماند. این همان چیزی است که قضیه تقسیم توضیح می‌دهد!

یعنی:

- **۲۳ شکلات را می‌توان به‌صورت مجموع تعدادی بسته‌ی ۵ تایی به‌علاوه‌ی ۳ شکلات باقی‌مانده نوشت.**
- **این باقی‌مانده همیشه باید از اندازه‌ی بسته‌های ما (عدد ۵) کوچک‌تر باشد، در غیر این صورت می‌توانستیم یک بسته‌ی دیگر هم تشکیل دهیم.**

قضیه تقسیم :

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در اینصورت اعدادی صحیح و منحصر بفرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که a=bq+r و $۰ \ll r < b$

تذکر: a را مقسوم وb را مقسوم علیه و q را خارج قسمت و r را باقی مانده می‌نامیم.

_مثال: اگر باقی بانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و۳ باشد در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد$(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را بدست آورید.

پاسخ :

$$m = ۱۷q_{۱} + ۵$$

$$n = ۱۷q_{۲} + ۳$$

$$2m - 5m = (34q_1 + 10) - (85q_2 + 15) = 34q_1 - 85q_2 - 5 = 17\overbrace{(2q_1 - 5q_2)}^{q_3} - 5 = 17q_3 - 5$$

چون باقیمانده یک عدد منفی هست پس یک تناقض است. پس به انتهای معادله ضریب $q_{۳}$ را اضافه و کم می کنیم. $۰ \ll r < b$

$$\Rightarrow \quad 2m - 5n = 17q_3 - 5 + 17 - 17 = 17q_3 + 17 - 23 = 17(q_3 - 1) - 23 = 17q'\text{-}23$$

$$\Rightarrow \quad r = \text{-}23$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم:

یکی از روش‌های مهم برای دسته‌بندی اعداد، افراز آن‌ها بر اساس باقی‌مانده‌ی تقسیم بر یک عدد خاص است. این کار به ما کمک می‌کند که همه‌ی اعداد را در چند گروه مشخص قرار دهیم و ویژگی‌های آن‌ها را بهتر بشناسیم.

بیان ساده‌ی مفهوم:

فرض کنید یک عدد صحیح a را بر یک عدد طبیعی b تقسیم کنیم. طبق قضیه تقسیم، می‌دانیم که این تقسیم همیشه یک باقی‌مانده دارد که از عدد b کوچک‌تر است. یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم همیشه یک مقدار مشخص و محدود خواهد بود.

به بیان ساده‌تر:

- اگر عددی را بر ۵ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی آن فقط می‌تواند یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد.
- این یعنی همه‌ی اعداد را می‌توان در پنج دسته‌ی مشخص قرار داد که هر دسته اعدادی را شامل می‌شود که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر یکی از این مقادیر باشد.

درک بهتر با مثال:

_مثال: فرض کنید می‌خواهیم اعداد صحیح را بر اساس باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۵ دسته‌بندی کنیم. وقتی یک عدد را بر ۵ تقسیم کنیم، ممکن است:

۱. باقی‌مانده صفر باشد: یعنی عدد کاملاً بر ۵ بخش‌پذیر است، مانند:
   - ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ...
   - این اعداد را می‌توان به‌صورت $a = ۵k$ نوشت.
۲. باقی‌مانده ۱ باشد: یعنی عدد دقیقاً یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است، مانند:
   - ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ...
   - این اعداد را می‌توان به‌صورت $a = ۵k + ۱$ نوشت.
۳. باقی‌مانده ۲ باشد: یعنی عدد دقیقاً دو واحد از مضرب ۵ بیشتر است، مانند:
   - ۲، ۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ...
   - این اعداد را می‌توان به‌صورت $a = ۵k + ۲$ نوشت.
۴. باقی‌مانده ۳ باشد: یعنی عدد دقیقاً سه واحد از مضرب ۵ بیشتر است، مانند:
   - ۳، ۸، ۱۳، ۱۸، ۲۳، ...
   - این اعداد را می‌توان به‌صورت $a = ۵k + ۳$ نوشت.

۵. باقی‌مانده ۴ باشد :یعنی عدد دقیقاً چهار واحد از مضرب ۵ بیشتر است، مانند:

- ۴، ۹، ۱۴، ۱۹، ۲۴، ...
- این اعداد را می‌توان به‌صورت $a = ۵k + ۴$ نوشت.

با توجه به قضیه تقسیم می دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد با تقسیم آن به عدد طبیعی b و با توجه به اینکه باقی مانده تقسیم یعنی r در رابطه $۰ \leq r \leq b$ صدق می کند، برای باقی‌مانده دقیقا b حالت وجود دارد.

در واقع با تقسیم عدد a بر b مجموعه $\mathbb{Z}$ به b دسته افراز می شود.

عددهای مضرب b bk

عددهایی که در تقسیم بر b باقی مانده ای برابر ۱ دارند   bk+۱

⋮

عددهایی که در تقسیم بر b باقی مانده ای برابر $b - ۱$ دارند $bk + (b - ۱)$

_مثال: اگر a بر عدد ۵ تقسیم شود در این صورت عدد a را به ۵ صورت می‌توان نوشت:

$a= ۵\,k$ و $a = ۵\,k + ۱$ و $a = ۵\,k + ۲$ و $a = ۵\,k + ۲$ و $a = ۵\,k + ۳$

و $a + ۵\,k + ۴$

درس سوم : هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

زمانی که دو عدد را بر یک عدد مشخص تقسیم می‌کنیم، ممکن است باقی‌مانده‌ی آن‌ها برابر باشد. در این صورت، می‌گوییم این دو عدد "با هم **همنهشت** "هستند.

_مثال: فرض کنید عددی مانند ۲۳ و عددی مانند ۸ را بر ۵ تقسیم کنیم:

- وقتی ۲۳ را بر ۵ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده ۳ است $۲۳ = ۵ \times ۴ + ۳$
- وقتی ۸ را بر ۵ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده ۳ است $۸ = ۵ \times ۱ + ۳$

چون هر دو عدد پس از تقسیم بر ۵ همان باقی‌مانده را دارند، می‌گوییم که ۲۳ و ۸ نسبت به ۵ همنهشت هستند.

_مثال: اگر ۱۲ و ۲ را بر ۵ تقسیم کنیم:

- ۱۲ بر ۵ تقسیم شود، باقی‌مانده ۲ است.
- ۲ بر ۵ تقسیم شود، باقی‌مانده ۲ است.
- پس می‌گوییم ۱۲ و ۲ نسبت به ۵ همنهشت هستند.

_مثال: اگر ۱۹ و ۴ را بر ۵ تقسیم کنیم:

- ۱۹ بر ۵ تقسیم شود، باقی‌مانده ۴ است.
- ۴ بر ۵ تقسیم شود، باقی‌مانده ۴ است. پس می‌گوییم ۱۹ و ۴ نسبت به ۵ همنهشت هستند.

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a,b اگر $m|a-b$ می گوییم a هم نهشت با b است به سنج یا پیمانه m و می نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$

$$\forall a \text{ و } b \in \mathbb{Z} \quad a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow a-b=mk$$

به بیان دیگر دو عدد a,b را به پیمانه m هم نهشت گوییم هرگاه باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم بر m یکسان باشد.

تذکر: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می باشد یعنی $A_{r=\{x\in \mathbb{Z}\ /x=mk+r\}}$ را کلاس یا دسته هم نهشتی r به پیمانه m می نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می دهیم.

_مثال: دو عدد ۱۱ و ۲۵ در تقسیم بر ۷ هر دو باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارند لذا :

$$۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۷|۲۵ - ۱۱ = ۱۴$$

_مثال: $[۴]_۷ = \{\text{... و } ۱۸ \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۴ \text{ و } -۳ \text{ و } -۱۰ \text{ و ...}\}$

فرم کلی اعضاء مجموعه $= ۷k + ۴$

رابطه هم نهشتی در اعداد صحیح :

ویژگی ۱) به دو طرف رابطه هم نهشتی می توان عدد صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + c \overset{m}{\equiv} b + c \\ a - c \overset{m}{\equiv} b - c \end{cases}$$

ویژگی ۲) دو طرف رابطه هم نهشتی را می توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

نکته: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست.

ویژگی۳) دو طرف رابطه هم نهشتی را می توان به توان n رساند $n\in \mathbb{N}$

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \Rightarrow \quad a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

نکته: عکس رابطه ۳ برقرار نیست. عکس این رابطه یعنی ریشه nام؟

ویژگی۴) دو طرف رابطه هم نهشتی را که به پیمانه های یکسان داشته باشند را می توان با هم جمع یا از هم کم و یا در هم ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \text{و} \quad c \overset{m}{\equiv} d \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$$

تذکر: اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در اینصورت $a \overset{m}{\equiv} r$.

_مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۲۷^۷) + ۱۹$ را بر عدد ۱۳ بدست آورید.

پاسخ:

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \qquad (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ \quad ۲۷^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۳ \times ۱ + ۶ \Rightarrow ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶$$

$$(۲۷)^۷ + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

نکته: اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m هم باقیمانده باشند در اینصورت $a \overset{m}{\equiv} b$

ویژگی۵) می توان دو طرف یا یک طرف رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۶) اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم باید آن هم نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ \text{و}\ (c\,\text{و}\,m) = d \quad \Rightarrow \quad a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نکته: در واقع قاعده حذف در هم نهشتی ها برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشند، برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ \text{و}\ (c\,\text{و}\,m) = ۱ \quad \Rightarrow \quad a \overset{m}{\equiv} b$$

_مثال: به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی ، عدد $۲^{۵n+۱} + ۲^{۱۰n+۲} - ۱$ بر ۱۱ بخش پذیر است؟

پاسخ: توانی از ۲ که نزدیک مضارب ۱۱ باشد $۲^۵$ است.

$$۲^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان}\, n} ۲^{۵n} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n \overset{\times ۲}{\rightarrow} ۲^{۵n+۱} \overset{۱۱}{\equiv} (-۱)^n \times ۲$$

اگر دوباره آن را به توان ۲ برسانیم، می شود: $۲^{۱۰n+۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۴$

پس شد : $۲^{۱۰n+۲} + ۲^{۵n+۱} - ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ + (-۱)^n \times ۲ - ۲$

اگر n فرد باشد $۰ = ۲ - ۲ \times (-۱)^n + ۴$ می‌شود. یعنی آن عبارت بر ۱۱ بخش-پذیر است.

کاربردهای هم نهشتی:

((پیدا کردن باقی مانده بر ۲و۳و۵و۹و۱۱ بدون انجام عمل تقسیم))

عدد نویسی را بر مبنای ده دهی انجام می‌دهیم و برای باز کردن یک عدد از توان‌های مختلف ۱۰ استفاده می‌کنیم.

_مثال:

$$۱۲۵۴۳۱۷ = ۷ + ۱ \times ۱۰ + ۳ \times ۱۰^{۲} + ۴ \times ۱۰^{۳} + ۵ \times ۱۰^{۴} + ۲ \times ۱۰^{۵} + ۱ \times ۱۰^{۶}$$

به طور کلی یک عدد را به‌صورت $A = \overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_۰}$ در نظر بگیریم. این عدد را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$A = \overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_۰} = a_۰ + ۱۰\ a_۱ + ۱۰^{۲} a_۲ + \dots + ۱۰^{n} a_n$$

برای به‌دست آوردن باقی مانده بر چند عدد خاص، دستورهایی وجود دارد که می‌توان از آن ها استفاده کرد.

باقی مانده بر ۲یا ۵ یا ۱۰:

به باز شده عدد $\overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_۰}$ توجه کنید

$$a_۰ \underbrace{+ ۱۰\ a_۱ + ۱۰^{۲} a_۲ + \dots + ۱۰^{n} a_n}_{\text{بر ۵و۲و۱۰ بخش پذیرند}}$$

بنابراین برای پیدا کردن باقی مانده یک عدد بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ کافی است به جای کل عدد، باقی مانده یکان آن را بر عدد خواسته شده به‌دست آورد.

_مثال : $۱۳۷ \overset{۵}{\equiv} ?$ $\longleftarrow$ $۷ \overset{۵}{\equiv} ۲$

باقی مانده بر ۳ یا ۹:

باز هم عدد $\overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_۰}$ را به صورت زیر باز می کنیم:

$$a_۰ + ۱۰\, a_۱ + ۱۰^۲ a_۲ + \cdots + ۱۰^n a_n$$
$$= a_۰ + \left(a_۱ + \underline{۹a_۱}\right) + \left(a_۲ + \underline{۹۹\, a_۲}\right) + \cdots$$

جملاتی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است بر ۳ یا ۹ بخش پذیرند بنابراین باقی‌مانده آن‌ها در تقسیم بر ۳ یا ۹ صفر می شود پس باقی مانده کل عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌مانده مجموع جمله‌های باقی‌مانده.

$$\overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{\text{۹ یا ۳}}{\equiv} a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

_مثال : $۱۳۹۸ \overset{۳}{\equiv} ?$ $\Leftarrow$ $۱ + ۳ + ۹ + ۸ \overset{۳}{\equiv} ۰$

باقی مانده بر ۱۱:

باز هم عدد $\overline{a_n \dots a_۲ a_۱ a_.}$ را به صورت زیر باز می کنیم

$$a_. + ۱۰\, a_۱ + ۱۰^۲ a_۲ + \cdots + ۱۰^n a_n$$
$$= a_. + (\underline{۱۱\, a_۱} - a_۱) + (\underline{۹۹\, a_۲} + a_۲) + \left(\underline{۱۰۰۱ a_۳} - a_۳\right) + \cdots$$

عددهایی که زیر آن‌ها خط کشیده شده‌است بر ۱۱ بخش‌پذیرند. پس برای به‌دست آوردن باقی‌مانده عددی بر ۱۱ از سمت راست، یک در میان عددی را منفی و مثبت کرده و باقی مانده را بر ۱۱ به‌دست می‌آوریم.

_مثال: $۲۴۱۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ - ۱ + ۴ - ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۶$

معادله هم‌نهشتی :

تعریف: یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب هایی چون $x_. \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کند.

_مثال: همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشد.

پاسخ: اگر آن عدد را ط فرض کنیم باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶ \xRightarrow{(۳و۷)=۱} ۳x \overset{۷}{\equiv} ۳\times ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

قضیه: معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(aوm)|b$

نکته: اگر $(aوm)=۱$ چون برای هر b همواره $۱|b$ پس معادله $ax\overset{m}{\equiv}b$ همواره دارای جواب است.

_مثال: معادله $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا $۳ \nmid ۱۱$ ، $(۶و۹)=۳$

تعریف: این معادله $ax+by=c$ که $x\,,y$ در اعداد صحیح جواب های آن هستند و $a,b,c \in \mathbb{Z}$ صورت را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادله سیاله به معادله هم نهشتی:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow b | ax - c$$

$$\Rightarrow \quad ax \overset{|b|}{\equiv} c \quad \text{و} \quad by \overset{|a|}{\equiv} c$$

نکته: با توجه به قضیه قبل نتیجه میگیریم که شرط لازم و کافی برای انکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a \text{و} b)|c$

_مثال: تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایره هم مرکز تیراندازی می‌کند اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد . اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده‌باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته‌باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود.

$$۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲$$

$$۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ + ۳ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۵ \times ۹ \Rightarrow x = ۳k + ۹ \quad , y = -۵k - ۱$$

$$x, y \in \mathbb{W} \Rightarrow k = \{-۱ \text{و} -۲ \text{و} -۳\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases} \text{و} \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases} \text{و} \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases}$$

($y=4, x=6$ یعنی تیرانداز ۶ تیر به دایره کوچکتر و ۴ تیر به دایره بزرگ‌تر زده است.)

_مثال: به چند طریق می توان با ۳۷۰۰ ریال ، تمبرهای ۱۵۰ ریالی و ۲۵۰ ریالی خرید .

پاسخ: تعداد تمبرهای ۱۵۰ ریالی را x و تعداد تمبرهای ۲۵۰ ریالی را y نشان می‌دهیم

$$\begin{aligned}&۱۵۰\,x+۲۵۰\,y\\&\qquad=۳۷۰۰\\&\qquad\xrightarrow{\text{بر ۵۰ ساده می کنیم}}۳\,x+۵\,y=۷۴\to ۵\,y\overset{۳}{\equiv}۷۴\xrightarrow{\text{ساده}}۲\,y\overset{۳}{\equiv}۲\\&\qquad\to y\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow y=۳\,k+۱\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&۳\,x+۵(۳\,k+۱)=۷۴\Longrightarrow ۳\,x+۱۵\,k+۵=۷۴\Longrightarrow ۳\,x=۶۹-۱۵\,k\\&\qquad\Longrightarrow x=۲۳-۵\,k\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x\geq ۰\Longrightarrow ۲۳-۵\,k\geq ۰\Longrightarrow k\leq ۴/۶\\ y\geq ۰\Longrightarrow ۳\,k+۱\geq ۰\Longrightarrow k\geq -۰/۳\end{cases}\Longrightarrow k=\text{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴}$$