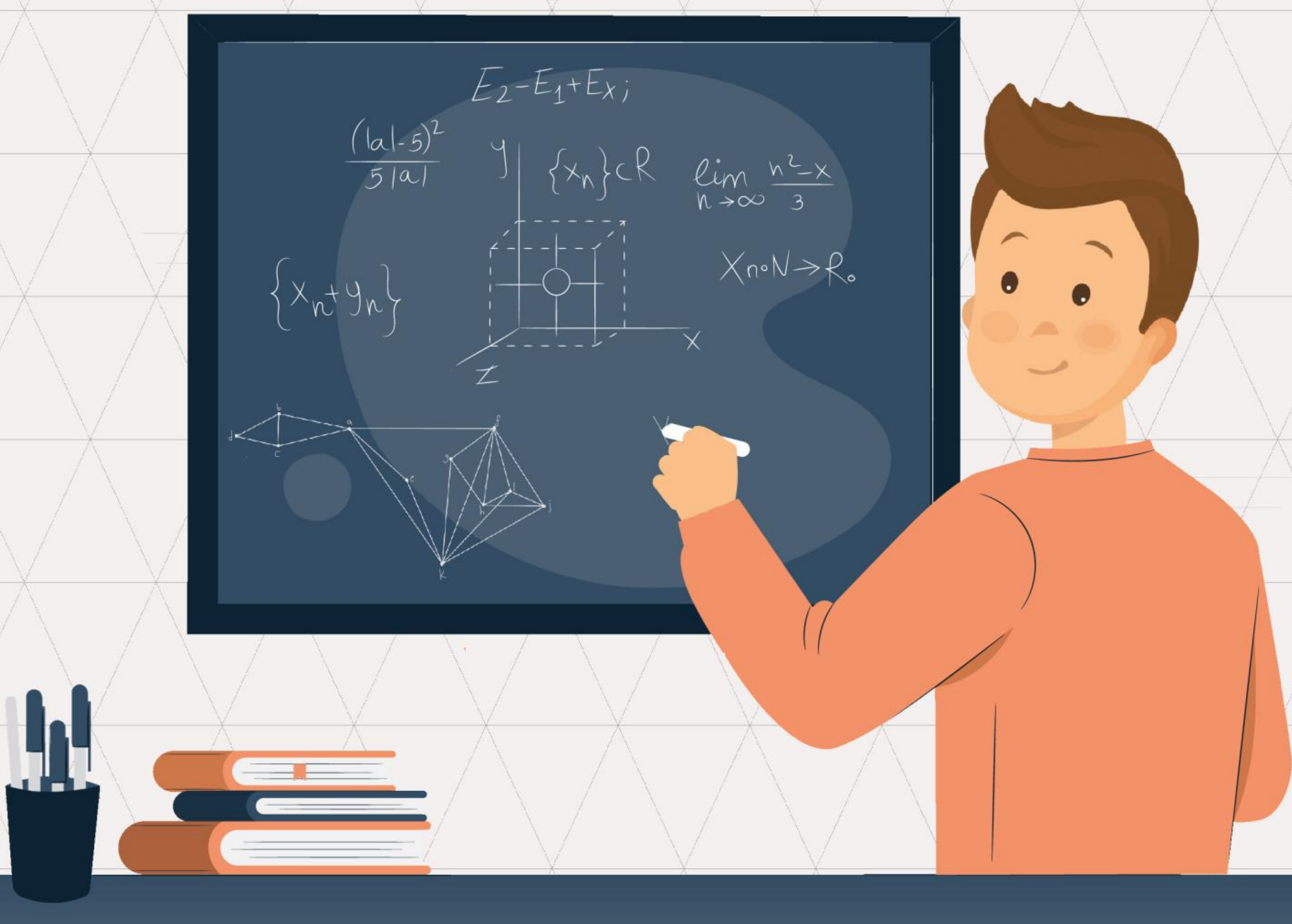
# ریاضیات گسسته دوازدهم ۱۲

متوسطه دوم

**(نمونه سوالات حل شده)**



# فصل اول : آشنایی با نظریه اعداد

## درس اول: استدلال ریاضی

**۱ – هر یک از گزاره های زیر را در صورت صحیح بودن اثبات و در صورت نادرست بودن با ارائه مثال نقض رد کنید.**

**پاسخ :**

**الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.**

**این گزاره صحیح است. اثبات: می دانیم اعداد فرد را به صورت $2n+1$ نمایش داده می‌شود. پس دو عدد فرد را $2n'+1$ و $2n+1$ در نظر می گیریم.**

$$2n+1+2n'+1=2(n+n')+2=2(n+n'+1)$$

**که این عدد، زوج است.**

**ب) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.**

**پاسخ:**

**این گزاره نادرست است. کافی است قرار دهیم $n = 4$**

**$2^4 - 1 = 15 \rightarrow$ عددی اول نیست**

**ج) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.**

**پاسخ:**

**گزاره صحیح است.**

**اثبات:**

$$\frac{\overbrace{(n+1)\times(n+2)(n+3)}^{\text{سه عدد طبیعی متوالی}}\times n!\times 3!}{n!\times 3!} = \frac{(n+3)!\times 6}{n!\times 3!} = \binom{n+3}{3}\times 6 \rightarrow$$

**پس بر ۶ بخش پذیر است.**

د) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

پاسخ:

صحیح است. اثبات: دو عدد $\frac{a}{b}$ . $\frac{c}{d}$ که $a.b.c.d \in \mathbb{Z}$, $d,b \neq 0$ دو عدد گویا است، پس:

$$\frac{a}{b}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{ad}+\mathrm{cb}}{\mathrm{bd}}$$

که $ad+cd \in \mathbb{Z}$ و $bd \neq 0$ پس $\frac{ad+cb}{\mathrm{bd}}$ عدد گویا است.

ه) اگر $\mathrm{k}$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴\mathrm{k}+1$ مربع کامل است.

پاسخ:

گزاره صحیح است.

اثبات:

چون $\mathrm{k}$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است پس: $k=n(n+۱)$

$$۴\underline{\mathrm{k}}+۱=۴\underline{(\mathrm{n})(\mathrm{n}+۱)}+۱=۴\left(\mathrm{n}^2+\mathrm{n}\right)+۱=۴\mathrm{n}^2+۴\mathrm{n}+۱=(۲\mathrm{n}+۱)^2$$

**۲- اگر $a,b$ دو عدد صحیح باشند و $ab$ عددی فرد باشد ثابت کنید $a^2+b^2$ زوج است.**

**پاسخ:**

**اثبات: چون $ab$ فرد است پس هم $a$ و هم $b$ فرد است. یعنی:**

$a=۲n+۱$ و $b=۲n'+۱$

$$\left.\begin{array}{l} a^2=۴n^2+۴n+۱ \\ b^2=۴n'^2+۴n'+۱ \end{array}\right. \rightarrow a^2+b^2=۴(n^2+n'^2)+۴(n+n')+۲=$$

$$۲[۲(n^2+n'^2)+۲(n+n')+۱]$$

**که عددی زوج است چون مضرب ۲ است.**

۳- اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

پاسخ:

به برهان خلف فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس $\frac{1}{x}$ گویا است:

درنتیجه وارون $\frac{1}{x}$ یعنی $X$ هم گویا است و این تناقض با فرض مسئله است.

۴- ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی هم علامت و مخالف صفر باشند داریم $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

پاسخ:

از اثبات بازگشتی استفاده می کنیم: چون x,y هم علامت و مخالف صفرند پس $xy>0$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq ۲ \Leftrightarrow x^2+y^2\geq ۲xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-۲xy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

**۵- اگر $\beta$، $\alpha$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + ۲\beta$ گنگ هستند.**

**پاسخ:**

**به برهان خلف فرض کنیم $\alpha - \beta$ گنگ نباشد، پس $\alpha - \beta$ گویا است.**

$$\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{گویا}} = ۲\alpha$$

**پس $۲\alpha$ گویا است در نتیجه $\alpha$ هم گویاست که این تناقض با فرض است.**

**حال به برهان خلف فرض کنیم $\alpha + ۲\beta$ نیز گنگ نباشد پس $\alpha + ۲\beta$ گویا است.**

$$\underbrace{(\alpha + ۲\beta)}_{\text{گویا}} - \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{گویا}} = \beta \rightarrow$$ **β گویاست .**

**۶- آیا دو عدد صحیح مانند x و y وجود دارد که $(x+y)^2 = x^2 + y^2$؟**

**پاسخ:**

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + ۲xy$

**پس باید $۲xy = 0$ باشد و این یعنی حداقل یکی از x یا y باید صفر باشد.**

**۷- ثابت کنید مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.**

**پاسخ:**

**فرض کنیم n عددی فرداست. پس $n = ۲k + ۱$**

$n^2 = (۲k+۱)^2 = ۴k^2 + ۴k + ۱ = ۲(۲k^2 + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$ **فرد است .**

$n^3 = (۲k+۱)^3 = (۲k)^3 + ۳(۲k)^2(1) + ۳(۲k)(۱)^2 + ۱^3$

$= ۸k^3 + ۱۲k^2 + ۶k + ۱ = ۲[۴k^3 + ۶k^2 + ۳k] + ۱$

$= ۲k' + ۱$ **فرد است**

**۸- برای هر سه عدد حقیقی x , y , z، ثابت کنید** $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + y + xz$

**پاسخ:**

**اثبات: کافی است از اثبات بازگشتی استفاده کنیم.**

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

**حال رابطه را در ۲ ضرب می کنیم:**

$$\Leftrightarrow ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - ۲xy - ۲yz - ۲xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ۲xy + x^2 + z^2 - ۲xz + y^2 + z^2 - ۲yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

**۹ - ثابت کنید میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.**

**پاسخ:**

**اثبات: پنج عدد طبیعی متوالی:**

$n+۱ \,.\, n+۲ \,.\, n+۳ \,.\, n+۴ \,.\, n+۵$

**میانگین این ۵ عدد:**

$$\frac{n+۱+n+۲+n+۳+n+۴+n+۵}{۵}$$

$$=\frac{۵n+۱۵}{۵}=n+۳ \rightarrow \text{عدد وسطی است}$$

## درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

**۱۰- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m + ۶)$.(۶m+۵) بر ۸ بخش پذیر باشند. ثابت کنید $a = \pm ۱$**

**پاسخ :**

$$\begin{cases} a|7m+6 \\ a|6m+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a|42m+36 \\ a|42m+35 \end{cases} \rightarrow \text{از هم کم می کنیم}$$

$$\rightarrow a|1 \ \rightarrow a = \pm 1$$

**۱۱- اگر a|b نشان دهید که $a^n|b^n$**

**پاسخ:**

$$\mathrm{a|b} \rightarrow b = aq \ \rightarrow b^n = a^n q^n$$

$$\rightarrow b^n = a^n \times q' \rightarrow \mathrm{a^n|b^n}$$

۱۲- اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید $ac|bd$

**پاسخ:**

$$\begin{array}{l} a|b \to b = aq \\ c|d \to d = cq' \end{array} \to bd = ac\ \underbrace{qq'}_{\downarrow}$$

$$\to bd = ac\ q'' \to ac|bd$$

۱۳- اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$

**پاسخ:**

$$\begin{array}{l} a|b \to a|mb \\ a|c \to a|nc \end{array} \pm$$
$$\overline{a|mb \pm nc}$$

**۱۴- ثابت کنید اگر $a|b$ آن گاه $(a.b) = |a|$**

**پاسخ:**

**می دانیم** $|a|\;\Big|\, a \xrightarrow{a|b} |a|\;\Big|\, b$

**از طرفی چون** $(a.b) = |a|$ **پس:**

$$\forall m > 0\,.\; m|a \;\;\wedge\;\; m|b \;\Rightarrow |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$$

**۱۵- ثابت کنید اگر $a|b$ آن گاه $[a.b] = |b|$**

**پاسخ:**

$(1)\;\; b|\;\;|b|$

$(2)\; \forall m > 0\,.\, a|m \;\;\wedge\;\; b|m \;\Rightarrow |b| \le |m| \;\rightarrow |b| < m$

**۱۶- اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.**

**پاسخ:**

$$\begin{array}{l|l} a & \overline{9k+4} \\ a & \underline{5k+3} \end{array} \rightarrow \begin{cases} a|45k+20 \\ a|45k+27 \end{cases} \rightarrow a|45k+20-(45k+27)$$

$$\rightarrow a|-7 \quad \rightarrow a|7$$

چون $a>1$ پس $a=7$

**۱۷- اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $5|4k+1$ ثابت کنید $25|16k^2+28k+6$**

**پاسخ:**

$$5|4k+1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25|16k^2+8k+1$$

سمت راست ۵+ کم دارد ولی می دانیم: $25|5$

$$\rightarrow \begin{cases} 25|16k^2+8k+1 \\ 25|5 \end{cases} \xrightarrow[\text{می شوند}]{\text{سمت راست جمع}} 25\,|16k^2+8k+6$$

**۱۸- آیا اگر $a|b$ و $c|d$ می توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟**

**پاسخ:**

**خیر، مثلاً $3|3$ و $2|4$ ولی $5|7$ درست نیست.**

**۱۹- ثابت کنید دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند.**

**پاسخ:**

**باید نشان دهید** $(n.n+1)=d=1$

$$(n.n+1)=d \rightarrow \begin{matrix} d|n \\ d|n+1 \end{matrix} \xrightarrow[\text{می شوند}]{\text{سمت راست کم}} d|n+1-n \rightarrow d|1 \rightarrow d=1$$

**۲۰- اگر $m.n\in N$ و $a.b\in \mathbb{Z}$ ثابت کنید** $m\le n .a|b \ \Rightarrow a^m|b^n$

**پاسخ:**

$$a|b \xrightarrow{\text{به توان } m} a^m|b^m \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{سمت راست در } b^{n-m}} \begin{matrix} a^m|b^m\times b^{n-m} \\ a^m|b^n \end{matrix}$$

**۲۱- اگر $p \neq q$ و q,p هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p.q)=۱$ به برهان خلف فرض کنیم $(p.q) = d \neq ۱$**

**پاسخ:**

$$(p.q) = d \;\to \begin{cases} d|p \xrightarrow[d \neq 1]{p\ \text{اول است}} d = p \\ d|q \xrightarrow[d \neq 1]{q\ \text{اول است}} d = q \end{cases} \to p = q \quad \text{تناقض}$$

(چون p اول است و $d|p$ پس $d = \pm 1$ یا $d = \pm p$)

**۲۲- هر دوعدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.**

**پاسخ:**

دو عدد صحیح و فرد متوالی: $۲k+۳$ ، $۲k+۱$

فرض کنیم $d=(۲k+۱, ۲k+۳)$ پس

$$\begin{matrix} d|۲k+۱ \\ d|۲k+۳ \end{matrix} \rightarrow d|(۲k+۳)-(۲k+۱)$$

$$d|۲ \rightarrow \begin{matrix} d=\pm ۲ & \times \\ d=\pm ۱ & \checkmark \end{matrix}$$

(چون d باید فرد باشد.)

۲۳- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

پاسخ:

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 40$$

$$a = 8q + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q' + 49$$

$$\rightarrow 8a - 7a = 56(q - q') = 9$$

$$a = 56q'' + (-9)$$

باقی مانده نمی تواند منفی باشد پس $-9 + 56 = \underbrace{47}_{\text{باقی مانده}}$

**۲۴- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در اینصورت باقی مانده تقسیم $a^2+b^2+3$ بر ۸ را بیابید.**

**پاسخ:**

فرد $a = 2n+1 \rightarrow b|a+2$

$$\rightarrow b|2n+3 \rightarrow b \text{ عددی فرد است } \rightarrow b = 2m+1$$

$$a^2+b^2 = (2n+1)^2+(2m+1)^2 = 4n^2+4n+1+4m^2+4m+1$$

$$\rightarrow a^2+b^2+3 = 4n^2+4n+1+4m^2+4m+1+3$$

$$= 4n^2+4m^2+4n+4m+5$$

$$= 4n(n+1)+4m(m+1)+5 \xrightarrow[\text{زوج است}]{\text{ضرب دو عدد متوالی}} 4\times 2k+4\times 2k'+5$$

$$= 8(k+k')+\boxed{5}$$

**۲۵- اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا a+۲ یا a+۴ بر ۳ بخش پذیر است.**

**پاسخ:**

**چون بخش پذیری بر ۳ مدنظر است و می دانیم در تقسیم بر ۳ اعداد به سه صورت:** 3k ، 3k+1 **یا** 3k+2 **هستند پس داریم:**

$$a = 3k \ \rightarrow 3|a \qquad \checkmark$$

$$a = 3k + 1 \ \rightarrow a + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) = 3k'$$

$$\rightarrow 3|a + 2 \qquad \checkmark$$

$$a = 3k + 2 \rightarrow a + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2) = 3k'$$

$$\rightarrow 3|a + 4 \qquad \checkmark$$

**۲۶- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^2 - n$**

**پاسخ:**

**طبق سؤال قبل داریم**

$n = 3k$ **یا** $3k + 1$ **یا** $3k + 2$

$n = 3k \rightarrow n^2 - n = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k) = 3k'$

**مضرب ۳ است پس** $3|n^2 - n$

$n = 3k + 1 \rightarrow n^3 - n = (3k + 1)^3 - (3k + 1) = 3(k')$ ✓

$n = 3k + 2 \rightarrow n^2 - n = (3k + 2)^3 - (3k + 2) = 3k'$ ✓

**۲۷- ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.**

**پاسخ:**

**اعداد را به صورت 2n و 2n+1 در نظر می گیریم.**

$$(2n+1)^3-(2n)^3=8n^3+4n^2+2n+1-8n^3=4n^2+2n+1$$

$$=2(2n^2+2n)+1$$

$$=2n'+1 \quad \checkmark$$

۲۸- اگر در یک تقسم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند.

ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز بر n بخش پذیر است.

اثبات:

تقسیم را به صورت $\begin{array}{r|l} a & \underline{b} \\ & q \\ \hline r & \end{array}$ در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} n|a \\ n|b \rightarrow n|bq \end{cases}$$

$$\begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \rightarrow n|a-bq \quad (1)$$

از طرفی می دانیم $a = bq + r$ پس $a - bq = r$ پس با توجه به رابطه (۱) داریم $n|r$

## درس سوم: هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

**۲۹- باقی مانده تقسیم $A =$ ۱۳۵۸۱۱۲ بر ۹ را بیابید.**

**پاسخ:**

**ابتدا A را بسط می دهیم**

$$A = 1358112 = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۱} ۱ \times ۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \\ ۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳ \times ۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۳ \\ ۱۰^۴ \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵ \times ۱۰^۴ \overset{۹}{\equiv} ۵ \\ ۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۸} ۸ \times ۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۸ \\ ۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱ \\ ۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \\ ۲ \overset{۹}{\equiv} ۲ \end{array}\right\} + \quad ۱ + ۳ + ۵ + ۸ + ۱ + ۱ + ۲ \overset{۹}{\equiv} ?$$

$$۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

**۳۰- آیا می توان یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟**

**پاسخ:**

**تعداد کیسه های ۳ کیلویی** = x

**تعداد کیسه های ۴ کیلویی** = y

$$3x + 4y = 19$$

$$4y \equiv 19 \rightarrow y \quad 1$$

$$\begin{cases} 4 \equiv 1 \\ 19 \equiv 1 \end{cases} \qquad \boxed{y = 3k + 1} \rightarrow \begin{array}{l} 3x + 4(3k+1) = 19 \\ 3x + 12k + 4 = 19 \rightarrow \boxed{x = -4x + 5} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -4k + 5 \\ y = 3k + 1 \end{cases} \rightarrow k = 0 \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$k = 1 \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad . \quad k = 2 \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$$

**۳۱- عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟**

**پاسخ:**

**کافی ست باقی مانده تقسیم ۱۳۹۸ بر ۹ را بیابیم یعنی:**

$$1398 \overset{9}{\equiv} ?$$

$$1398 = 1 \times 10^{3} + 3 \times 10^{2} + 9 \times 10 + 8$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{3} \overset{9}{\equiv} 1 \\ 10^{2} \overset{9}{\equiv} 1 \rightarrow 3 \times 10^{2} \overset{9}{\equiv} 3 \\ 10 \overset{9}{\equiv} 1 \rightarrow 9 \times 10 \overset{9}{\equiv} 9 \\ 8 \overset{9}{\equiv} 8 \end{array}\right\} 1398 \overset{9}{\equiv} 1 + 3 + 9 + 8 \overset{9}{\equiv} 21 \overset{9}{\equiv} 3$$

**باقی مانده برابر ۳ است.**

**۳۲- ثابت کنید عدد $23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.**

**پاسخ:**

$$(23)^{51} = (11+12)^{51} \xrightarrow{\text{نکته } (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n} (23)^{51}$$

$$= (11+12)^{51} \underset{11\times 12}{\equiv} 11^{51} + 12^{51}$$

**حال با جایگذاری داریم:**

$$23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \overset{13}{\equiv} 11^{51} + 12^{51} - 11^{51} - 12^{51} = 0$$

**۳۳- باقی مانده تقسیم عدد $9 \times (2^{11} + 7)$ را بر ۲۳ بیابید.**

**پاسخ:**

$$2^5 \overset{23}{\equiv} 9 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2^{10} \overset{23}{\equiv} 81 \rightarrow 2^{10} \overset{23}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2^{11} \overset{23}{\equiv} 24 \overset{23}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{11} \overset{23}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{+7} 2^{11} + 7 \overset{23}{\equiv} 1 + 7 = 8$$

$$\xrightarrow{\times 9} (2^{11} + 7) \times 9 \overset{23}{\equiv} 72 \overset{23}{\equiv} 3 \rightarrow (2^{11} + 7) \times 9 \overset{23}{\equiv} \boxed{3} \quad \text{باقی مانده}$$

**۳۴- اگر دو عدد ۳a-۵ و ۴a-۷ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد ۹a+۶ را بدست آورید.**

**پاسخ:**

**چون 3a-5 و 4a-7 رقم یکان برابر دارند، پس به پیمانه ۱۰ هم نهشت اند.**

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \rightarrow ۴a - ۳a \overset{۱۰}{\equiv} ۵ + ۷$$

$$a \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

حال باید ۹a+۶ را به پیمانه ۱۰ محاسبه کنیم.

$$\xrightarrow{\times ۹} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \rightarrow ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \xrightarrow{+۶} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

رقم یکان ۴ است.

**۳۵-** باقی مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵!$ را بر ۱۰ به دست آورید. رقم یکان $A$ را بیابید)

**پاسخ:**

**کافی است مقدار $A$ به پیمانه ۱۰ را بیابیم.**

$$۱! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \qquad ۴! \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

$$۲! \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \qquad ۵! = ۱۲۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

$$۳! \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \qquad ۶! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$ (چون عامل ۱۰ دارد)

$$\vdots$$

$$۵۰۰! \overset{۱۰}{=} ۰$$

$$A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} \underline{۳} \rightarrow$$ رقم یکان

**۳۶- به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟**

**پاسخ:**

**تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی =x**

**تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی =y**

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰ \rightarrow ۲x + ۵y = ۲۹$$

$$۵y \overset{۲}{\equiv} ۲۹ \rightarrow y \overset{۲}{\equiv} ۱ \rightarrow \boxed{y = ۲k + ۱}$$

$$\begin{cases} ۵ \overset{۲}{\equiv} ۳ \\ ۲۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ \end{cases}$$

$$۲x + ۵(۲k + ۱) = ۲۹ \rightarrow ۲x + ۱۰k + ۵ = ۲$$

$$x = -۵k + ۱۲$$

$$k = ۰ \rightarrow \begin{cases} y = ۱ \\ x = ۱۲ \end{cases} \checkmark$$

$$k = ۱ \rightarrow \begin{cases} y = ۷ \\ x = ۳ \end{cases} \checkmark \qquad k = ۲ \rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ x = ۵ \end{cases} \checkmark$$

$$k = ۳ \rightarrow \begin{cases} y = -۳ \\ x = ۷ \end{cases} \checkmark$$

**۳۷- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه همان سال چه روزی است؟**

**پاسخ:**

۲۹ مهر
۳۰ آبان
۳۰ آذر
۳۰ دی
۳۰ بهمن
۷ اسفند

+ ⇒ ۲۹ + ۱۲۰ + ۷ = ۱۵۶ $\overset{7}{\equiv}$ ۲

دو روز بعد از یکشنبه ← سه شنبه

**۳۸- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی است؟**

**پاسخ:**

**بهمن ، دی ، آذر ، آبان ، مهر ، شهریور**

**۳۱-۳۰-۳۰-۳۰-۳۰+۳۰+۱۲=۱۲۰+۳۱+۱۲**

$$= 163 \overset{7}{\equiv} 2$$

**در این حالت باید از جمعه دو روز به عقب برگردیم ← چهارشنبه**