

هندسه دوازدهم

مستویه دوم

(نکات و خلاصه درس)



فصل اول : ماتریس و کاربرد ها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

تعریف: ماتریس، آرایشی مستطیلی است که به هر عضو آن درایه یا عنصر می گوئیم.

اگر ماتریس A ، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس A ، $m \times n$ است و آن را بصورت

$$A_{m \times n} \text{ یا } A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ نمایش می دهیم.}$$

با توجه به ماتریس روبرو، درایه $a_{۲۱}$ را در نظر بگیرید، این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع ماتریس A شده است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

گاهی اوقات می توان ماتریس A را به شکل ضابطه ای از a_{ij} تعریف کرد. برای مثال ماتریس

$$A = [۲i - j]_{۲ \times ۳} \text{ به صورت زیر بدست می آید:}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲(۱) - ۱ & ۲(۱) - ۲ & ۲(۱) - ۳ \\ ۲(۲) - ۱ & ۲(۲) - ۲ & ۲(۲) - ۳ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$



مثال: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های سطر

دوم چند واحد از مجموع درایه‌های ستون سوم کمتر است؟

پاسخ: درایه‌های ماتریس A را بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1 - 2 + 2 & 1 - 3 + 2 \\ 2 + 1 & 2^2 + 1 & 2 - 3 + 2 \\ 3 + 1 & 3 + 2 & 3^2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجموع درایه‌های سطر دوم برابر ۹ و مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۱۱ است. پس $11 - 9 = 2$ ؛ یعنی مجموع درایه‌های سطر دوم، ۲ واحد کمتر از مجموع درایه‌های ستون سوم است.

نمونه‌هایی از ماتریس‌های خاص:

۱- ماتریس صفر: ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر است.

$$\bar{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲- ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه آن $1 \times n$

$$[a \quad b \quad c]_{1 \times 3} \\ \rightarrow R = [8 \quad 4 \quad 5 \quad 9 \quad 2]$$



۳- ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد. مرتبه آن $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون های آن یکسان است. مرتبه آن $n \times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

۵- ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که همه درایه های بالای قطر اصلی صفر است.

$$S = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & c & \cdot \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که همه درایه های پایین قطر اصلی صفر است.

$$Q = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & d & e \\ \cdot & \cdot & f \end{bmatrix}$$

۷- ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه های بالا و پایین قطر اصلی صفر است.

$$L = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$



۸- ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابرند.

$$P = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \end{bmatrix}$$

۹- ماتریس همانی (واحد): ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی ۱ می باشد.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس A و B را مساوی گویند، هرگاه:

(۱) دو ماتریس هم مرتبه باشند.

(۲) درایه ها نظیر به نظیر در A و B برابر باشند.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد، در این صورت $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2, y = 1, z = -2 \Rightarrow x + y + z = 1$$



اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها:

۱) جمع و تفریق: اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه های نظیر دو ماتریس جمع یا تفریق بدست می آید.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$A \pm B = [a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

ویژگی های جمع و تفریق:

اگر سه ماتریس A ، B و C هم مرتبه باشند، آنگاه:

$$۱) A + B = B + A$$

$$۲) k(A \pm B) = kA \pm kB \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$۳) A + \bar{O} = A$$

$$۴) A + (-A) = \bar{O}$$

$$۵) (A + B) + C = A + (B + C)$$

۲) ضرب :

الف) ضرب عدد در ماتریس: اگر عدد در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه های آن ضرب می شود.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$



ب) ضرب دو ماتریس : ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند. $(A_{m \times n} \times B_{n \times k} = C_{m \times k})$

به عنوان مثال: $A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 3} = C_{3 \times 3}$

برای ضرب دو ماتریس درایه های هر سطر از ماتریس اول را نظیر به نظیر در درایه های ستون ماتریس دوم ضرب و حاصل با هم جمع می شود و در انتها در ماتریس حاصل ضرب جایگزین می شود.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1+0 & 4+1+0 \\ 1+3+8 & 2-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

ویژگی های ضرب ماتریس ها:

۱) $AI = IA = A$ I : ماتریس همانی

۲) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

۳) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

۴) $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$

۵) $(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$



🔔 **نکته:** اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

🔔 **نکته:** حاصل ضرب دو ماتریس قطری ، قطری است.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & \cdot & \cdot \\ \cdot & be & \cdot \\ \cdot & \cdot & cf \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل ضرب

$A \times B$ ماتریس قطری باشد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \cdot \\ \cdot & y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -8 + 2a = \cdot \\ b - 3 = \cdot \end{cases} \rightarrow a = 4, b = 3$$

۳) **توان ماتریس ها:** اگر ماتریس A مربعی باشد، داریم:

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$$

.

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = A^{n-1} \cdot A$$



ویژگی به توان رساندن ماتریس‌ها:

$$۱) I^n = I$$

$$۲) (kA)^n = k^n A^n \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$۳) A^m \times A^n = A^{m+n}$$

$$۴) (A^n)^m = A^{nm}$$

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان

تعریف: به هر ماتریس مربعی مانند ماتریس A ، عددی حقیقی نسبت داده می‌شود. $\det(A) =$

$$|A|$$

روش محاسبه دترمینان:

$$A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow |A| = ad - bc$$




دو نوع روش برای بدست آوردن ماتریس 3×3 :


روش اول بسط دترمینان: در این روش یک سطر یا ستون دلخواه از ماتریس را انتخاب می کنیم، درایه اول از سطر یا ستون انتخاب شده را در نظر می گیریم، سطر و ستون آن را حذف می کنیم و دترمینان درایه های باقی مانده را حساب می کنیم، سپس در $(-1)^{\text{شماره ستون} + \text{شماره سطر}}$ درایه انتخاب شده و خود درایه انتخاب شده ضرب می کنیم و برای دو درایه بعدی هم همین کار را انجام می دهیم و با هم جمع می کنیم.

برای مثال بسط نسبت به سطر اول:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

نکته: علامت درایه ها در ماتریس 3×3 به این صورت است $(-1)^{i+j}$: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ 

نکته: نسبت به هر سطر یا ستون دترمینان بگیرید، حاصل دترمینان عددی منحصر بفرد است، برای راحتی بهتر است نسبت به سطر یا ستونی دترمینان بگیریم که تعداد صفر بیشتری دارد. 



مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -4$$

روش دوم دستور ساروس: دو ستون اول ماتریس را کنار دترمینان می نویسیم از قطر اصلی ماتریس سه خط می کشیم، اعداد روی هریک از این خط ها را در هم ضرب و حاصل ضرب اعداد روی سه خط را با هم جمع می کنیم. حالا از قطر فرعی ماتریس سه خط می کشیم، اعداد روی هر یک از خط ها را در هم ضرب می کنیم و حاصل ضرب اعداد روی سه خط را با هم جمع می کنیم و بعد جمع دوم را از جمع اول کم می کنیم. به عبارتی مجموع ضرب درایه های روی قطرهای اصلی را از مجموع ضرب درایه های روی قطرهای فرعی کم می کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را با روش ساروس بدست آورید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (0 + 4 - 1) - (0 + 1 + 6) = 3 - 7 = -4$$



ویژگی های دترمینان:

۱- اگر درایه های یک سطر یا ستونی از ماتریس صفر باشد، حاصل دترمینان برابر صفر است.

۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آنگاه $|A||B| = |AB|$

$$|A|^n = |A^n| \quad -۳$$

۴- اگر دو سطر یا ستون از ماتریس ضریب هم باشند (حالت خاص : با هم برابر باشند) حاصل دترمینان صفر است.

۵- دترمینان ماتریس های قطری و مثلثی از ضرایب درایه های قطر اصلی به دست می آید.

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix} = abc, \quad \begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ d & b & \cdot \\ f & e & c \end{vmatrix} = abc$$

$$|I| = |I^n| = 1 \quad -۶$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = t \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = kt \quad -۷$$

$$A_{n \times n}, k \in \mathbb{R} \Rightarrow |kA| = k^n |A| \quad -۸$$

$$A_{m \times n} B_{n \times m}, m > n \Rightarrow |AB| = 0 \quad -۹$$

مثال: اگر A ماتریس 3×3 و $|A| = 5$ باشد، $|A|A|$ را بیابید.

$$|A|^n \times |A| \Rightarrow 5^3 \times 5 = 5^4 = 625$$



نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آن گاه:

$$|AB| = |BA| \text{ (الف)}$$

(ب) مجموع درایه های روی قطر اصلی AB با مجموع درایه های روی قطر اصلی BA برابر است.

وارون ماتریس

تعریف: ماتریس مربعی B را وارون ماتریس A گوئیم هر گاه:

$$AB = I \stackrel{B=A^{-1}}{\implies} AA^{-1} = I$$

نکته: وارون هر ماتریسی منحصر بفرد است.

نکته: شرط وارون پذیری ماتریس A این است که $|A| \neq 0$ باشد.

مثال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، a را بیابید.

$$|A| = 0 \implies \begin{vmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a(-a-1) + 6 = 0 \implies -a^2 - a + 6 = 0 \implies (a+3)(a-2) = 0$$

$$= 0 \implies \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$



روش محاسبه وارون ماتریس 2×2

الف) از تعریف $AA^{-1} = I$:

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد A^{-1} را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ c - a & d - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 2a - c = 1 \\ c - a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 & c = 1 \\ b = 1 & d = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2b - d = 0 \\ d - b = 1 \end{cases} \rightarrow \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ب) از روش ماتریس الحاقی:

تعریف: اگر A ماتریس 2×2 باشد آنگاه A^* یک ماتریس 2×2 از تعویض جای درایه های قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید، A^* را ماتریس الحاقی A می نامند.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ باشد، آنگاه:}$$

ویژگی های وارون ماتریس:

۱) $(A^{-1})^{-1} = A$

۲) $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

۳) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$



$$۴) (kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

$$۵) I^{-1} = I^n = I$$

$$۶) (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

$$۷) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$۸) A = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{b} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

🔔 نکته: اگر B و C ماتریس وارون پذیر و ماتریس A مجهول باشد به طوریکه $BAC=D$

$$\text{آنگاه } A=B^{-1}DC^{-1}$$

🔔 نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند و $A+B=kAB$ به شرط آنکه A و B

وارون پذیر باشند، آن گاه :

$$A^{-1} + B^{-1} = kI \xrightarrow{\text{در حالات خاص}} A + B = AB \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$



مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید .

پاسخ:

$$|A| = (1 \times 1) - (4 \times 2) = 2 \neq 0$$

پس A دارای وارون می باشد.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی :

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ \acute{a}x + \acute{b}y = \acute{c} \end{cases}$ که از دو خط تشکیل شده است به شکل ماتریس مقابل نمایش داده می شود.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \acute{a} & \acute{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \acute{c} \end{bmatrix}$$

با توجه به شکل ماتریسی دستگاه معادلات داریم: $AX=B$ و هدف از حل دستگاه معادلات ، یافتن مجهولات ماتریس X است پس $X = A^{-1}B$ به شرط $|A| \neq 0$ یعنی A وارون پذیر باشد . پس اگر $|A| = 0$ شد آنگاه یا دستگاه فاقد جواب است یا اینکه دستگاه بی شمار جواب دارد.



مثال: اگر $\begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \times A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را بیابید.

پاسخ:

$$AB = C \Rightarrow A = B^{-1}C$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7 - (-6)} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهول، به صورت

$$\begin{bmatrix} -1 & \cdot \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ است. اگر } x=1 \text{، مقدار } y \text{ را بیابید.}$$

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -f \\ y = 2f - 1 \end{cases} \Rightarrow f = -1 \text{ و } y = -3$$





بانک محتوای آموزشی SET

آسان و سریع مطالب مهم را مرور کنید و برای آزمون آماده شوید.

همین الان کلیک کن



دوره‌های آموزشی

با دوره‌های آموزشی وارد مسیر یادگیری شوید و گام به گام خود را در کل درس راحت کنید.



نمونه‌سوال‌های حل شده

با نمونه‌سوال‌های حل شده درس به درس، مثال‌های مهم را ببینید و مفاهیم را آسان درک کنید.



خلاصه نکات

با خلاصه نکات درس به درس فقط به نکات مهم بپردازید و زمان را ذخیره کنید.



ویدئو آموزشی

با ویدئوهای کوتاه درس به درس، مطالب درس را آسان و سریع یاد بگیرید.



www.youtube.com/@saminskill

www.aparat.com/set_ir_official

www.instagram.com/set.ir.shop

t.me/set_ir_levelup

[@set_ir_levelup](https://www.facebook.com/set_ir_levelup)

[@levelupset](https://www.facebook.com/levelupset)

۰۲۱۴۴۰۷۰۷۳۰

۰۹۰۲۷۱۴۳۴۰۲



اسکن کنید