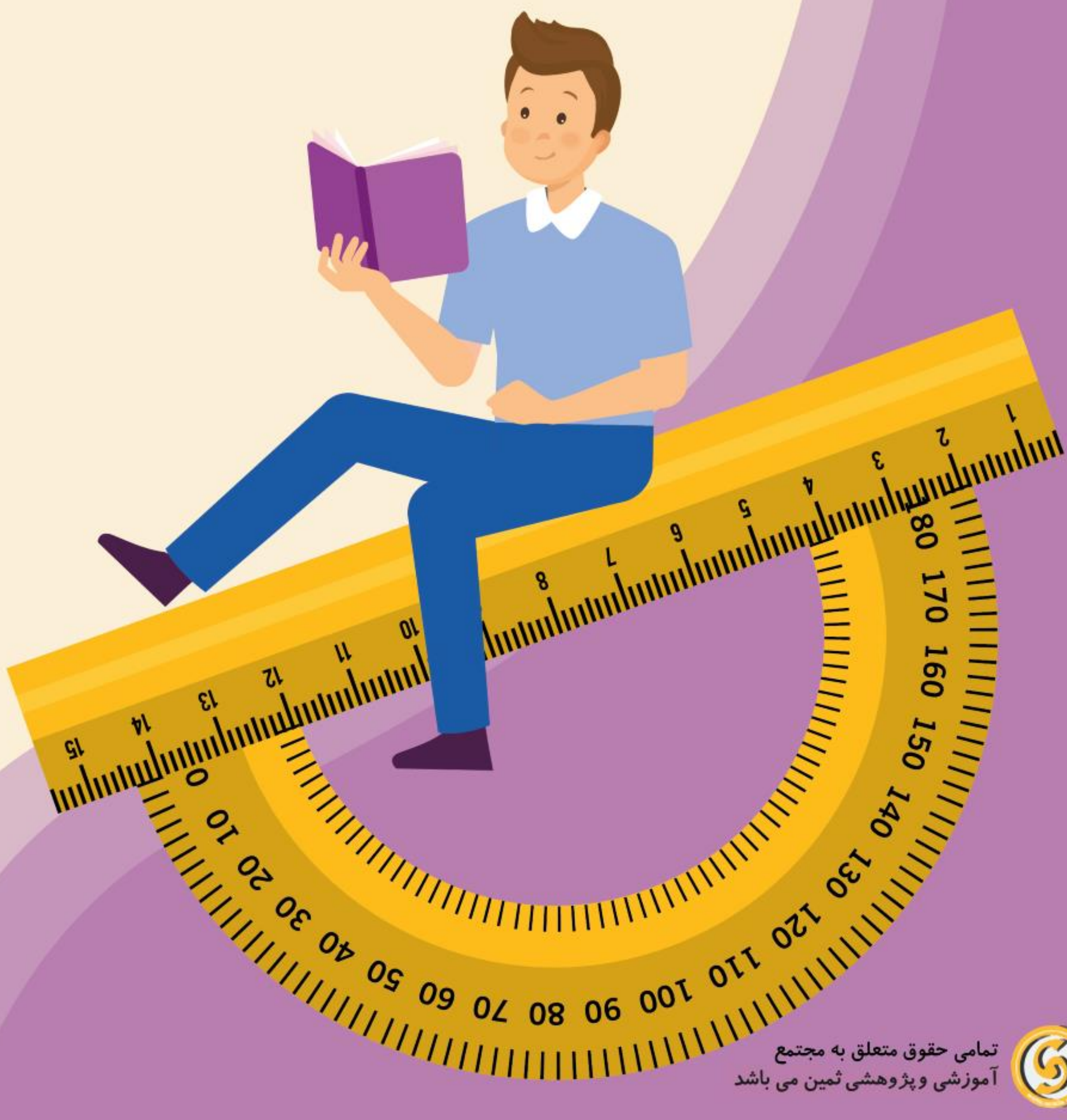
هندسه دوازدهم ۱۲

متوسطه دوم

(نمونه سوالات حل شده)



فصل اول : ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & -a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و اگر AB ماتریس قطری باشد، b و a را بیابید.

پاسخ:

ابتدا ضرب دو ماتریس ۲×۲ را انجام می دهیم. سپس به ازای مقادیری که روی قطر اصلی ماتریس AB نیستند صفر قرار می دهیم و مقدار b و a را به دست می آوریم.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & a\\ b & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & a\\ 6-b & 2a+1\end{bmatrix}$$

نکته! ترتیب در ضرب ماتریس ها مهم است.

$$a=0 \quad , \qquad 6-b=0 \rightarrow \boxed{a=0}\,,\boxed{b=6}$$

۲- جواب معادله زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

پاسخ:

برای حل معادله ابتدا از سمت چپ ماتریس ها را در هم ضرب می کنیم تا به یک ماتریس نهایی برسیم سپس برای صفر شدن ماتریس کافی است تک تک درایه ها را صفر کنیم.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2+2x+3 \end{bmatrix} = (-x-1)(x-3)$$

$$x = -1{,}3$$

۳- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ و $BA^{n}=\begin{bmatrix}4 & 41\\ 3 & 32\end{bmatrix}$ باشد مقدار n را بیابید.

پاسخ:

برای پیدا کردن مقدار، n باید الگوی A^{n} را بیابیم.

نکته! A^{n} یعنی ماتریس A، n بار در خودش ضرب شده است.

$$A^{1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad A^{2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{3}=A^{2}\times A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

:

$$A^{n}=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

حال BA^{n} را به دست آورده و از حل معادله n را می یابیم.

$$BA^{n}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 41\\ 3 & 32\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 4n+1\\ 3 & 3n+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 41\\ 3 & 32\end{bmatrix}$$

$$\sim \quad 4n+1=41$$
$$\boxed{n=10}$$

۴- برای ماتریس A و B داریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ , A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} , B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

حال $AB + BA$ را بیابید.

پاسخ:

برای به دست آوردن $AB + BA$ از ضرب و جمع ماتریس عمل می کنیم:

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

با داشتن ماتریس A^2, B^2 و $(A+B)$ می توان $AB + BA$ را پیدا کرد.

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = (A^2 + B^2 + AB + BA)$$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} + \mathrm{AB} + \mathrm{BA}$$

$$AB + BA = \begin{bmatrix} 11-0 & 12-6 \\ 12-6 & 11-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ ماتریس باشد. $(\frac{1}{2}A^3)$ را بیابید.

پاسخ:

ابتدا $\frac{1}{2}A$ را حساب کرده و بعد به توان ۳ می رسانیم.

$$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(\frac{1}{2}A)^3=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-1$$

۶- اگر $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد $x+y$ کدام است؟

پاسخ:

ابتدا از چپ دو ماتریس را در هم ضرب می کنیم و برای پیدا کردن x,y درایه به درایه با سمت راست چک می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad x=2\ ,y=1 \qquad x+y=1+2=3$$

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد درایه سطر اول ستون دوم A^2 را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & x^2+2y \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درایه سطر اول و ستون دوم برابر $2x$ است.

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix}$ و $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \overline{\mathrm{O}}$ آنگاه a+b را بیابید.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + 5b & 10a - 40 \\ -4 + 3b & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + 20 & 20 \\ ab - 16 & 5b - 24 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -2a + 5b & 10a - 40 \\ -4 + 3b & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2a + 20 & 20 \\ ab - 16 & 5b - 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2a + 5b = -2a + 20 \qquad 5b = 20 \qquad b = 4$$

$$10a - 40 = 20 \qquad 10a = 60 \qquad a = 6 \qquad a + b = 4 + 6 = 10$$

ابتدا BA و AB را به دست آورید اگر $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \overline{\mathrm{O}}$ باشد آنگاه $AB = BA$ است.

حال تک به تک درایه ها را با هم مساوی قرار می دهیم و مقدار b و a را به دست می آوریم.

سپس $a + b$ را به دست می آوریم.

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد $A^3 - A^2$ را بیابید.

پاسخ:

ابتدا ماتریس A^3 و A^2 را به دست می آوریم سپس آن را از هم کم می کنیم.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۱۰- اگر سه ماتریس دارای رابطه زیر باشد حاصل $A^2 + 4B^2 - 2AB - 2BA$ را بیابید.

$$A - 2B = C$$

پاسخ:

ابتدا $A^2 + 4B^2 - 2AB - 2BA$ را تجزیه می کنیم تا به فرم $A - 2B = C$ در آید.

$$(A^2 - 2AB) + (4B^2 - 2BA)$$

$$A(A - 2B) + 2B(2B - A)$$

$$A(C) + 2B(-C)$$

$$AC - 2BC$$

$$C(A - 2B) = C \times C = C^2$$

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ و $(A+\mathrm{I})^3=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد آن گاه، $a+c$ را بیابید.

پاسخ:

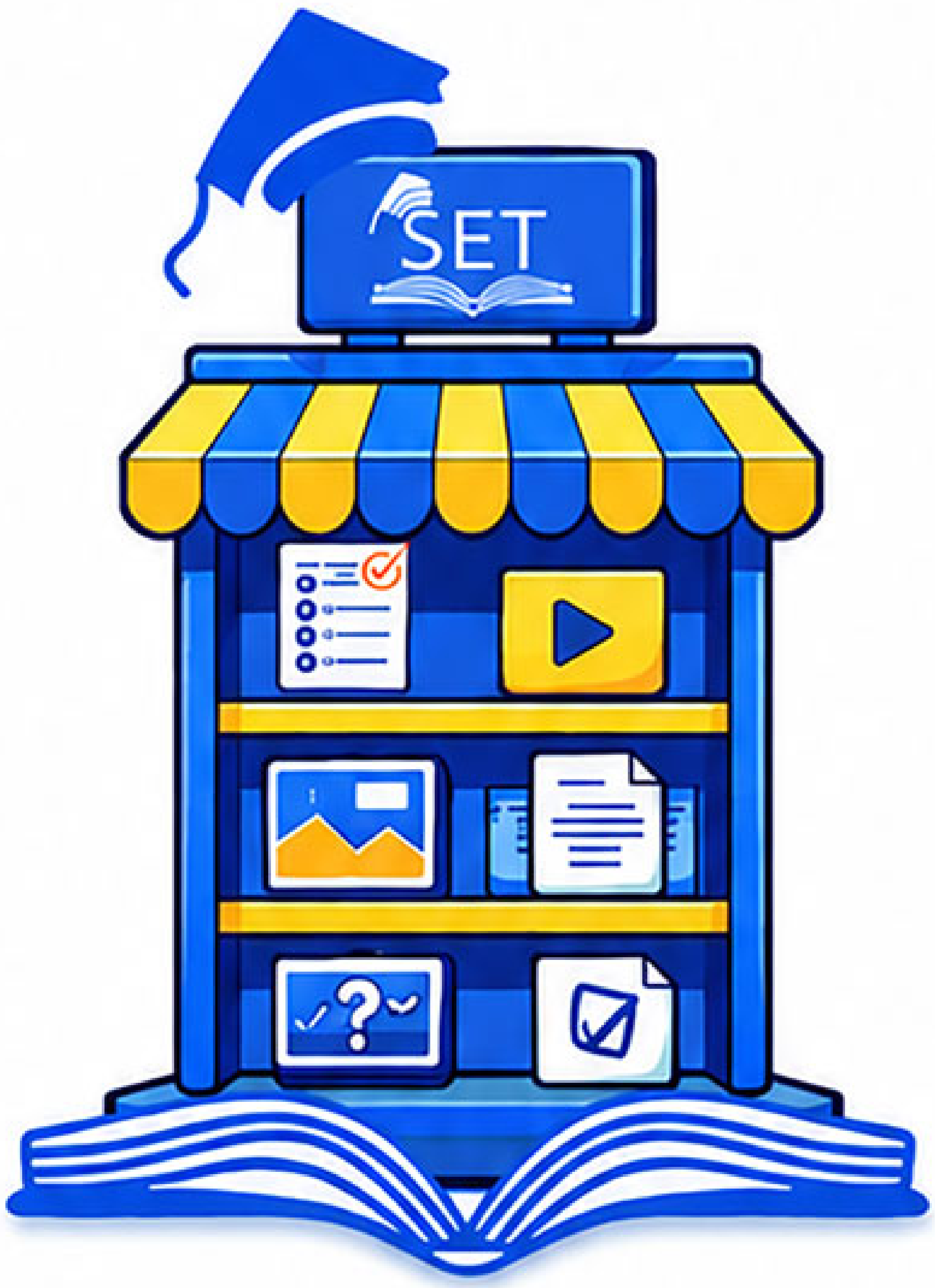
ابتدا $A+I$ را حساب می کنیم آن گاه ماتریس به دست آمده را به توان ۳ می رسانیم. سپس مقدار a و c را حساب می کنیم آن گاه $a+c$ را حساب می کنیم.

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{matrix}a=4\\c=-3\end{matrix}\quad a+c=4-3=1$$



بانک محتوای آموزشی SET

آسان و سریع مطالب مهم را مرور کنید و برای آزمون آماده شوید.

همین الان کلیک کن

دوره‌های آموزشی

با دوره‌های آموزشی وارد مسیر یادگیری شوید و گام به گام خود را در کل درس راحت کنید.

نمونه‌سوالات حل شده

با نمونه سوالات حل شده درس به درس، مثال‌های مهم را ببینید و مفاهیم را آسان درک کنید.

خلاصه نکات

با خلاصه نکات درس به درس فقط به نکات مهم بپردازید و زمان را ذخیره کنید.

ویدئو آموزشی

با ویدئوهای کوتاه درس به درس، مطالب درس را آسان و سریع یاد بگیرید.

set.ir

www.youtube.com/@saminskill

www.aparat.com/set_ir_official

www.instagram.com/set.ir.shop

t.me/set_ir_levelup

@set_ir_levelup

@levelupset

۰۲۱۴۴۰۷۰۷۳۰

۰۹۰۲۷۱۴۳۴۰۲

اسکن کنید