۱۲
ریاضی دوازدهم

متوسطه دوم

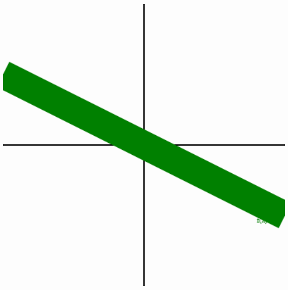
(نکات و خلاصه درس)

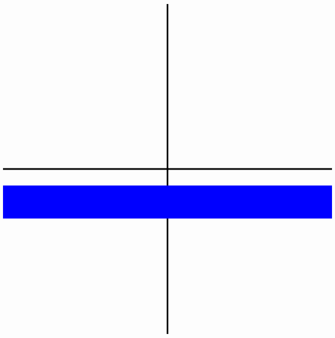
فصل اول : تابع

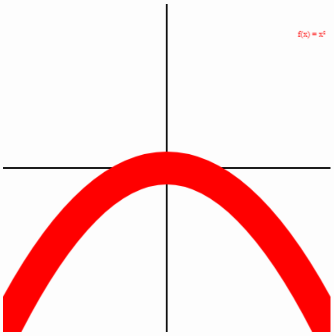
درس اول : توابع چند جمله ای _ توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله ای:

به یک تابع با ضابطه ی $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ که در آن a_0, a_1, … , a_n اعداد حقیقی غیرصفر هستند و $n \epsilon \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله ای از درجه ی n می گوییم.







نکته ها

- تابع ثابت، یک چندجمله ای از درجه ی صفر است به عبارت دیگر $(n=0)$.

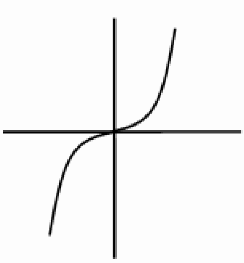
$$f(x)=a_0$$

- توابع خطی، یک چندجمله ای از درجه ی یک هستند به عبارت دیگر $(n=1)$.

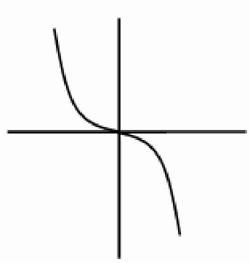
$$\begin{cases} f(x)=a_1x^1+a_0 \\ f(x)=\mathrm{ax}+\mathrm{b} \end{cases}$$

- فرم کلی توابع درجه دو به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است.

- فرم کلی توابع درجه سه به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ است و شکل کلی آنها به دو صورت زیر است.



$a>0$



$a<0$

توابع صعودی و نزولی:

۱) اگر D بازه ای در دامنه ی f باشد، می گوییم f در بازه یD **اکیداً صعودی** است، هرگاه برای هر $x_2 \epsilon D$ و x_1 داشته باشیم:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

۲) f در بازه D را **اکیداً نزولی** می گوییم، هرگاه برای هر $x_2 \epsilon D$ و x_1 داشته باشیم:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$$

- ✓ **توجه ۱:** به توابع اکیداً صعودی یا نزولی، اکیداً یکنوا نیز گفته می شود.

۳) f را در بازه یD **نزولی** گوییم هرگاه برای هر $x_2 \epsilon D$ و x_1 داشته باشیم.

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)}$$

۴) f را در بازه ی D **صعودی** گوییم هرگاه برای هر $x_2 \epsilon D$ و x_1 داشته باشیم.

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$$

- ✓ **توجه۲:** به توابع صعودی و نزولی، یکنوا نیز گفته می شود.
- ✓ **توجه۳ :** تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی (یکنوا) به حساب می آید.

مثال ها

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2|x|$ در چه ناحیه هایی صعودی و نزولی هستند؟

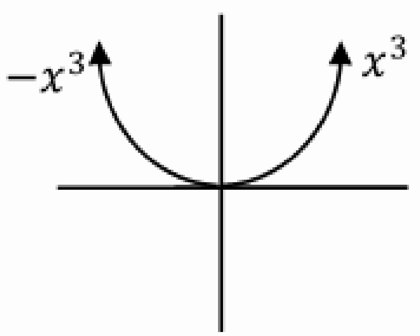
پاسخ:

$$f(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه فوق و رسم نمودار مربوطه خواهیم دید:

در $(-\infty, 0]$ اکیدا نزولی

در $[0, +\infty)$ کیدا صعودی



درس دوم : ترکیب توابع

ترکیب دو تابع:

ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می دهیم و به صورت $(fog)_{(x)} = f(g(x))$ یا $fog: x \to f\big(g(x)\big)$ تعریف می کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f\big((x)\big)$$

دامنه ی توابع مرکب:

دامنه ی تابع fog ، مجموعه ی x هایی است که همزمان در دو شرط زیر صدق کند:

۱) x در دامنه ی g باشد.

۲) g(x) در دامنه ی f باشد.

$$D_{gof} = \{x \epsilon D_f | f(x) \epsilon D_g\}$$

✓ توجه۴: با توجه به تعریف فوق شرط آن که تابع fog تشکیل شود آن است که:

$$R_g \cap D_f \neq \emptyset$$

(یا به عبارتی اشتراک برد تابع g و دامنه تابع f ، ناتهی باشد.)

راه دیگر برای یافتن دامنه ی توابع مرکب :

تابع $gof(x)$ یا $fog(x)$ را بدون ساده کردن در هیچ مرحله ای تشکیل دهیم و در انتها دامنه ضابطه ی تابع ساده نشده را حساب کنیم.

مثال ها

مثال ۲: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$، آنگاه دامنه ی fog را بدست آورید.

پاسخ:

ابتدا بدون محدود کردن دامنه، تابع مرکب مدنظر را به دست می آوریم:

$$(\mathrm{fog})_{(\mathrm{x})} = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \mathrm{f}(\sqrt{\mathrm{x}-1}) = (\sqrt{\mathrm{x}-1})^2$$

حال دامنه ضابطه ی تابع ساده نشده را حساب می کنیم:

$$D_{fog}: x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \boxed{D_{fog} = [1\,,+\infty)}\,,$$

$$\boxed{fog(x) = x-1}$$

- **محاسبه $f(x)$ با در اختیار داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$:**

کافی است به جای $g(x)$، A قرار داده و از این تساوی x را برحسب A بدست آوریم و در ضابطه ی $f(g(x))$ جایگزین کنیم.

- **محاسبه ی $g(x)$ با در اختیار داشتن $f(x)$ و $f(g(x))$:**

ابتدا از روی ضابطه ی تابع f، $f(g(x))$ را بدست می آوریم و سپس آن را با ضابطه ی $f(g(x))$ داده شده، برابر قرار می دهیم و از این تساوی ضابطه ی $g(x)$ را تعیین می کنیم.

مثال ها

مثال۳: اگر $g(x)=\frac{x-1}{x}$ و $f\big(g(x)\big)=2x$ باشد ضابطه ی f را مشخص کنید.

پاسخ:

$$g(x)=A \Rightarrow \frac{x-1}{x}=A \Rightarrow x-1=Ax \Rightarrow x-Ax=1$$

$$\Rightarrow x(1-A)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{1-A}$$

$$f\big(g(x)\big)=2x \Rightarrow f(A)=2\times\frac{1}{1-A}=\frac{2}{1-A}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{1-x}$$

مثال۴: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $f\big(g(x)\big)=\frac{1}{x-1}$ ، آن گاه $g(x)$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$\boxed{f(g(x)=\frac{1}{x-1}}\ , f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f\big(g(x)\big)=\frac{1}{g(x)}}$$

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow g(x)=x-1$$

تبدیل نمودار توابع:

اگر $y=f(x)$ و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه:

۱) $y=f(x)\pm k$ نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد روی محور عرض ها (y) بالا یا پایین می برد.

۲) $y=kf(x)$ نمودار $f(x)$ را k برابر روی محور عرض ها بزرگ یا کوچک می کند. (بدون تغییر اندازه ی دامنه)

✓ توجه: به طور کلی $y=kf(x)+b$ تغییرات نمودار $f(x)$ را روی برد تابع انجام می دهد و دامنه هیچ تغییری نمی کند.

۳) $y=f(x+k)$ نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ محور x ها انتقال می دهد$(k>0)$.

۴) $y=f(x-k)$ نمودار $f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت راست محور x ها انتقال می دهد$(k>0)$.

۵) $y = f(kx)$ نمودار $f(x)$ را به اندازه $\frac{1}{k}$ برابر روی محور طول ها (x) بزرگ یا کوچک می کند. (بدون تغییر اندازه برد)

۶) $y = -f(x)$ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور طول ها قرینه می کند.

۷) $y = f(-x)$ نمودار $f(x)$ را نسبت به محور عرض ها قرینه می کند.

نکته ها

❑ اگر $y = f(x)$ باشد، آن گاه برای رسم $y = |f(x)|$ کافی است:

نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس آن قسمت از نمودار را که زیر محور x ها قرار گرفته است را نسبت به همین محور (x) قرینه کنیم.

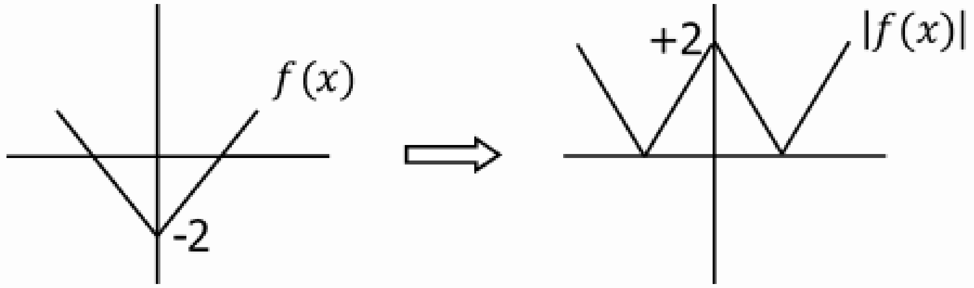
مثال ها

مثال۵: نمودار $y = \left| |x| - 2 \right|$ را رسم کنید.

پاسخ:

نمودار $|x|$ به اندازه ۲ واحد به سمت پایین حرکت می کند.

سپس محدوده ای که زیر محور طول ها قرار دارد، نسبت به همان محور قرینه می شود:



درس سوم : تابع وارون

تابع یک به یک:

به تابعی که هر دو عضو متمایز از دامنه را به دو عضو متمایز از برد نظیر کند تابع یک به یک می گویند. (یا به عبارتی باید برای هر ورودی، یک خروجی منحصر به فرد داشته باشیم.)

نکته ها

- برای تشخیص یک به یک بودن یک تابع از روی نمودار کافی است برای هر خطی که موازی محور Xها رسم می کنیم، این خطوط نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند.

وارون تابع:

- یک تابع در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد.
- برای رسم وارون یک تابع کافی است که نمودار تابع را نسبت به خط $y = x$ وارون کنیم.
- ترکیب یک تابع با وارون خودش همواره برابر x می شود.

$$(\mathrm{fof}^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{of})(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

به دست آوردن ضابطه ی تابع وارون:

برای بدست آوردن ضابطه ی تابع وارون f ابتدا به جای $f(x)$ از y استفاده می کنیم سپس x را برحسب y بدست می آوریم و در انتها به جای y، x و به جای x، $f^{-1}(\mathrm{x})$ قرار می دهیم.

مثال ها

مثال۶: وارون تابع $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-1}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-1}$$
$$y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$$
$$y - 4 = -\sqrt[3]{x-1}$$
$$(y-4)^3 = -(x-1)$$
$$x = (y-4)^3 + 1$$
$$f(x) = (x-4)^3+1$$

محدود کردن دامنه تابع:

گاهی می توان یک تابع که یک به یک نیست را با محدود کردن دامنه آن، به تابعی تبدیل کرد که یک به یک بوده و در نتیجه وارون پذیر نیز باشد.

مثال ها

مثال۷: با محدود کردن تابع x^2-4x+6، یک تابع یک به یک تشکیل دهید.

پاسخ:

$$f(x)=x^2-4x+6$$

$$f(x)=(x-2)^2+2$$

می توان دامنه تابع مدنظر را به بازه $(-\infty,2]$ محدود کرد. ضابطه جدید همان ضابطه تابع اصلی می باشد و تنها دامنه اش از اعداد حقیقی به بازه $(-\infty,2]$ تغییر یافته است.

همچنین در صورت نیاز می توان مشابه مثال قبل وارون تابع محدود شده را نیز حساب کرد.