

ریاضی دوازدهم

مقطع دوم

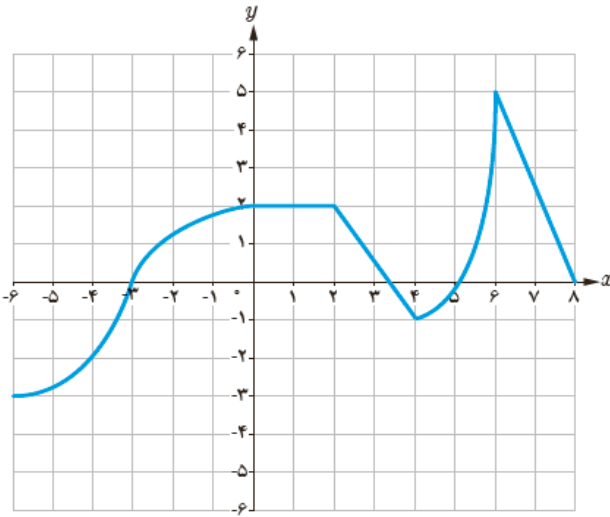
(نمونه سوالات حل شده)



(تمامی حقوق متعلق به مجتمع
آموزشی و پژوهشی ثمین می باشد.)

فصل اول : تابع

۱_ مشخص کنید نمودار زیر در کدام بازه ها صعودی، نزولی و ثابت هستند.



پاسخ:

صعودی $(-6, 0)$

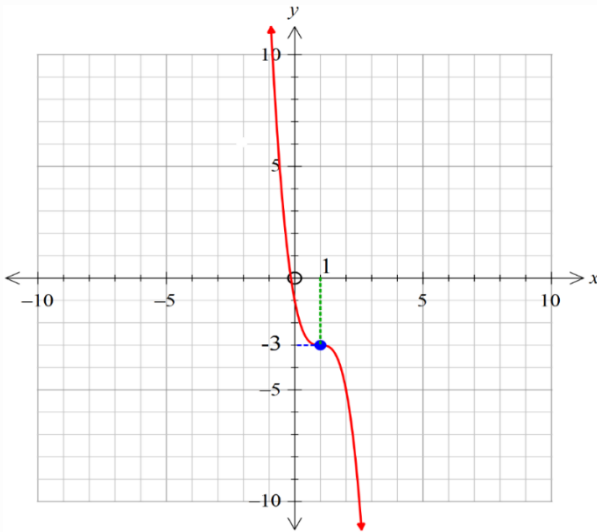
ثابت $(0, 2)$

نزولی $(2, 4)$

صعودی $(4, 6)$

نزولی $(6, 8)$

۲_ نمودار زیر مربوط به معادله $y = a(b - x)^3 + c$ است. مقادیر a, b, c را مشخص نمایید.



پاسخ:

با توجه به شکل نمودار می دانیم که تابع مورد نظر تابع $y = -x^3$ است و با توجه به معادله $y = a(b - x)^3 + c$ بی درنگ به مثبت بودن ضریب a پی می بریم چون که علامت ضریب x منفی است. از آنجا که نمودار نسبت به محور عرض ها و مبدأ ۳ واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است؛ پس $c = -3$. حال با توجه به منفی بودن علامت ضریب x در معادله و انتقال یک واحدی به سمت راست نسبت به مبدأ، مقدار b برابر یک می شود.
($b = 1$)

از آنجا که نمودار محور y را در نقطه ای به مختصات $(0, -1)$ قطع نموده است پس این نقطه باید در معادله صدق کند و خواهیم داشت:

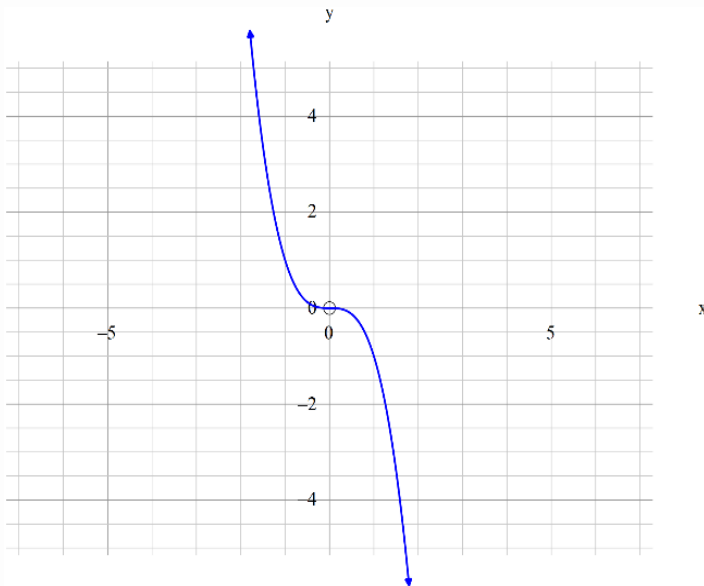
$$y = a(b - x)^3 + c \xrightarrow{\substack{b = 1, c = -3 \\ x = 0, y = -1}} -1 = a(1 - 0)^3 - 3 \rightarrow a = 2$$

۳. تابع $f(x) = -x^2|x|$ در چه ناحیه هایی صعودی و نزولی است؟

پاسخ:

$$f(x) = -x^2|x| = \begin{cases} -x^3 & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3$$

همواره نزولی





۴_ اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، آنگاه $(f \circ g)(x)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

معادله ی $g(x)$ را در معادله $f(x)$ به جای x جایگذاری می نمایم :

$$f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2$$



۵_ اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $D_{g \circ f}$, $(g \circ f)(x)$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$$

$$D_f = \mathbb{R} , \quad D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0, +\infty)\}$$

$$= \mathbb{R} \cap [2k\pi, 2k\pi + \pi] \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}}$$

$$D_{g \circ f} = [2k\pi, 2k\pi + \pi]_{k \in \mathbb{Z}}$$

۶. اگر $g(x) = \frac{x-1}{x}$ و $f(g(x)) = 2x$ باشد ضابطه ی f را مشخص کنید.

پاسخ:

$$g(x) = A \Rightarrow \frac{x-1}{x} = A \Rightarrow x-1 = Ax$$

$$\Rightarrow x(1-A) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-A}$$

$$f(g(x)) = 2x \Rightarrow f(A) = 2 \times \frac{1}{1-A} = \frac{2}{1-A}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{1-x}$$

۷_ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} f(g(x)) = 3g(x) - 4 \\ f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \end{cases}$$

$$3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

$$3g(x) = 3x^2 - 6x + 18$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 18}{3}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۸_ اگر $g(x) = 2x^3 - 4$ و $f(g(x)) = 3x$ ، آن گاه ضابطه ی تابع $f(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$g(x) = A \rightarrow 2x^3 - 4 = A \Rightarrow 2x^3 = A + 4 \Rightarrow x^3 = \frac{A + 4}{2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{A + 4}{2}}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(A) = 3x \Rightarrow f(A) = 3x$$

$$f(A) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{A + 4}{2}}\right)$$

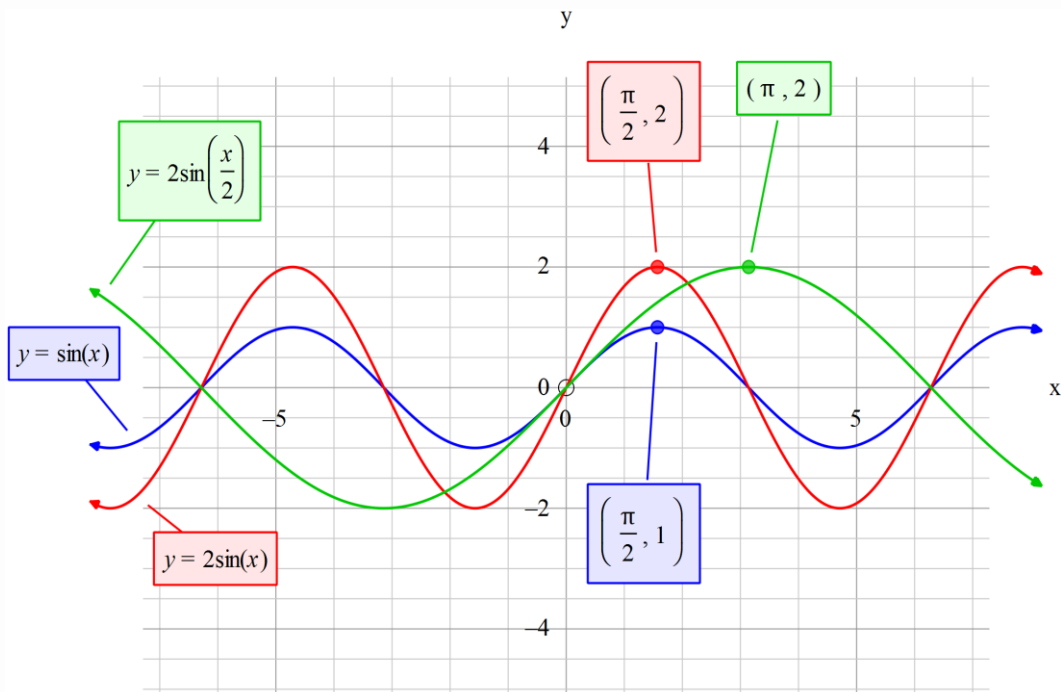
$$\text{جای } A, x \text{ را قرار می دهیم} \Rightarrow f(x) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{x + 4}{2}}\right)$$

۹_ با توجه به نمودار $y = \sin x$ نمودار تابع $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید.

پاسخ:

در ابتدا نمودار $y = \sin x$ با رنگ آبی مشخص شده و بعد نمودار $y = 2 \sin x$ با رنگ قرمز را رسم می کنیم چون ضریب پشت $\sin x$ ، دو است پس نمودار روی محور عرض ها دو برابر کشیده می شود.

در مرحله آخر چون ضریب پشت x ، $\frac{1}{2}$ است پس نمودار قرمز رنگ روی محور طول ها دو برابر کشیده می شود و نمودار سبز رنگ نمودار $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ است.



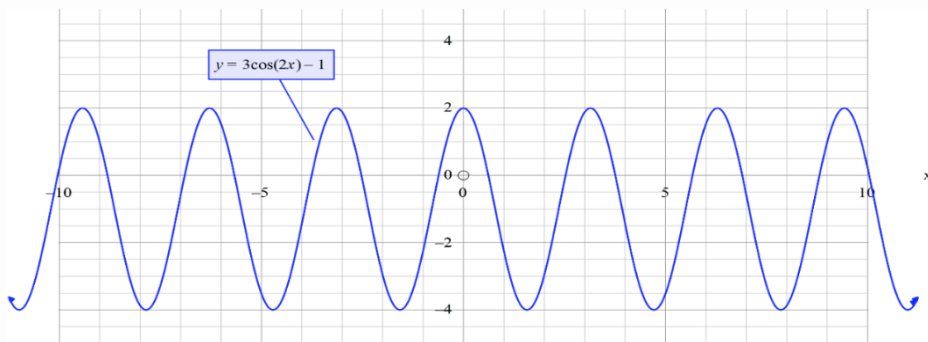
۱۰. با توجه به نمودار $y = \cos x$ نمودار تابع $y = |3 \cos 2x - 1|$ را رسم کنید.

پاسخ:

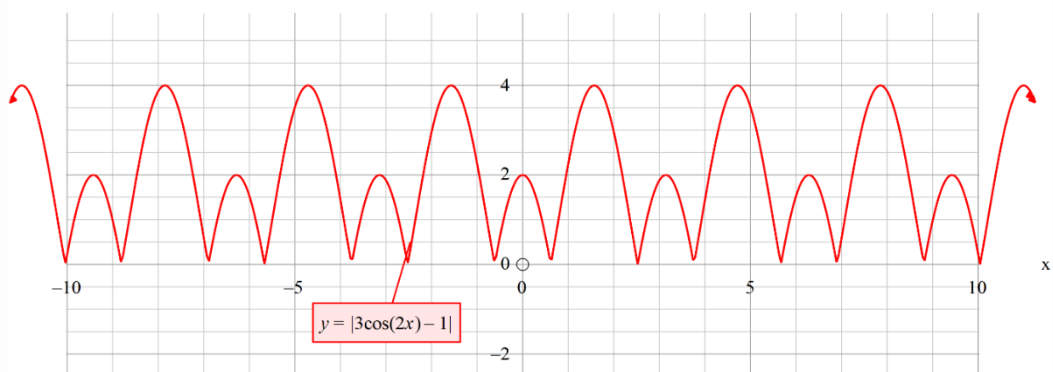
به ترتیب زیر عمل می کنیم:

سه برابر کشیده کردن روی محور عرض ها، به اندازه $\frac{1}{2}$ برابر کردن روی محور طول ها،

یک واحد به سمت پایین، مثبت کردن مقادیر منفی نمودار



y



-2

۱۱_ وارون تابع $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-1}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = 4 - \sqrt[3]{x-1}$$

$$y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$$

$$y - 4 = -\sqrt[3]{x-1}$$

$$(y - 4)^3 = -(x - 1)$$

$$x = -(y - 4)^3 + 1 \Rightarrow f(x) = -(x - 4)^3 + 1$$

۱۲_ ضابطه ی وارون تابع $f(x) = 1 - 2x^3$ را بدست آورید، سپس با نوشتن راه حل $(f^{-1} \circ f)(2)$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$y = 1 - 2x^3 \Rightarrow 2x^3 = 1 - y$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1 - y}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1 - y}{2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1 - y}{2}}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{1 - (1 - 2x^3)}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = x = 2$$

$$f^{-1} \circ f(2) = 2$$

۱۳_ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را بدست آورید.

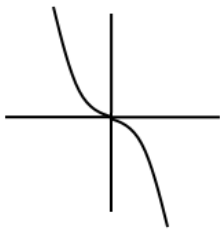
پاسخ:

$$y = \frac{-8x + 3}{2} \Rightarrow 2y = -8x + 3$$

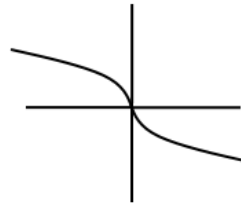
$$8x = 3 - 2y \Rightarrow x = \frac{3 - 2y}{8}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3 - 2x}{8}$$

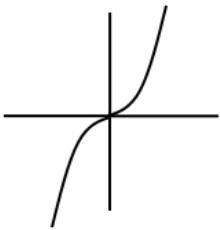
۱۴_ اگر $f(x) = x|x|$ نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است. (سراسری تجربی ۹۵)



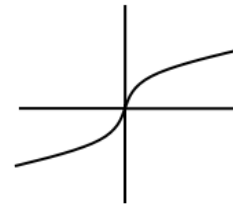
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

پاسخ:

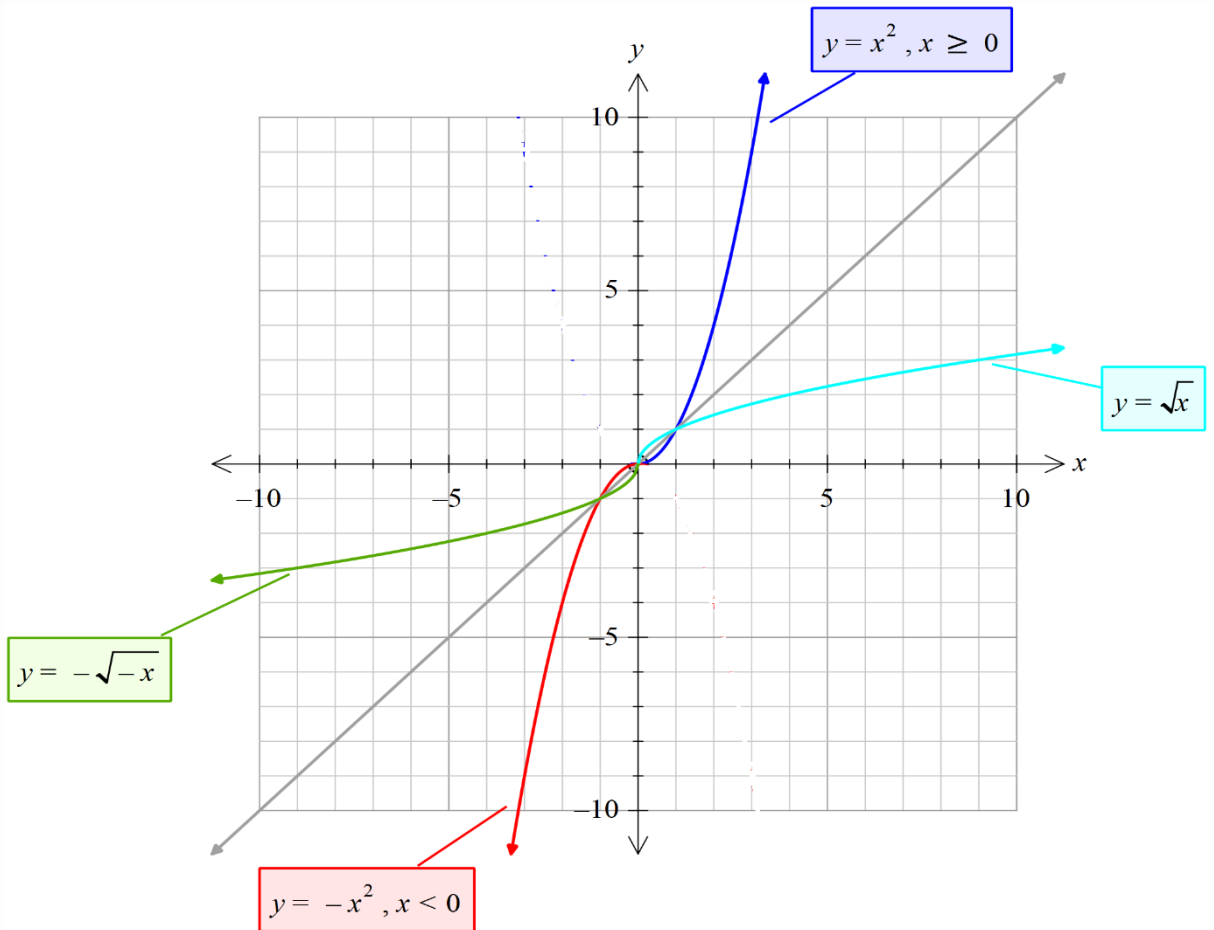
$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

$$y = -x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{-x} \xrightarrow{x < 0} f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$$

با توجه به شکل صفحه بعد، گزینه ۳ صحیح می باشد.

نمودار مربوط به پاسخ سوال ۱۴:



۱۵. ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۶)

۴) $-x|x|$

۳) $x|x|$

۲) $-x^2$

۱) x^2

پاسخ:

با توجه به سوال قبل پاسخ گزینه سوم می شود.

۱۶_ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ آنگاه مقدار $(f \circ g)^{-1}(5)$ را بیابید.

پاسخ:

$$y = f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{8}x^3 - 3$$

$$y = \frac{1}{8}x^3 - 3$$

$$8y + 24 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8y + 24}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{8x + 24}$$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = \sqrt[3]{8 \times 5 + 24} \Rightarrow$$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = \sqrt[3]{64} = 4$$

۱۷_ اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ آن گاه $(gof)^{-1}(x)$ را بدست آورید.

پاسخ:

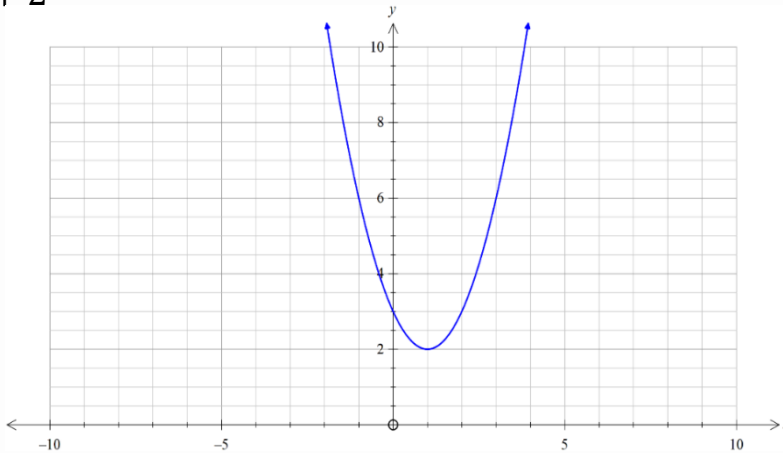
$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4} \\ g^{-1}(x) = x-2 \end{array} \right\} (gof)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}((x-2))$$
$$= \frac{(x-2)+3}{4} = \frac{x+1}{4}$$

۱۸_ با محدود کردن دامنه ی تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک تابع یک به یک به دست بیاورید و دامنه، برد و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

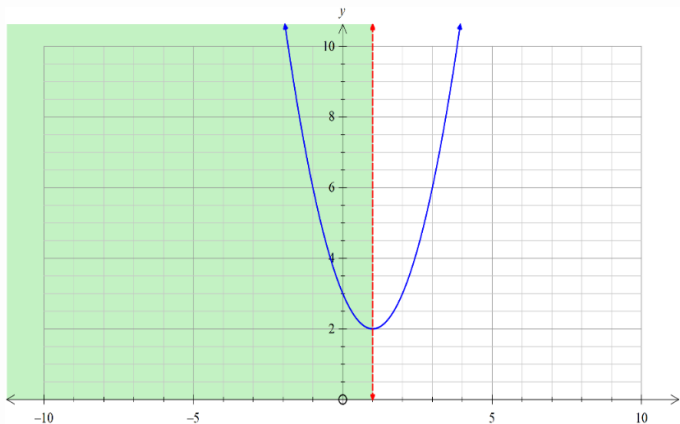
پاسخ:

سهمی معادله ی فوق به صورت زیر است:

$$(x - 1)^2 + 2$$



اگر دامنه ی تابع را به بازه ی $(1, +\infty)$ محدود کنیم آن گاه تابع در این بازه یک به یک می شود و برد آن $(2, +\infty)$ می شود. (ادامه پاسخ در صفحه بعد)



ادامه پاسخ سوال ۱۸:

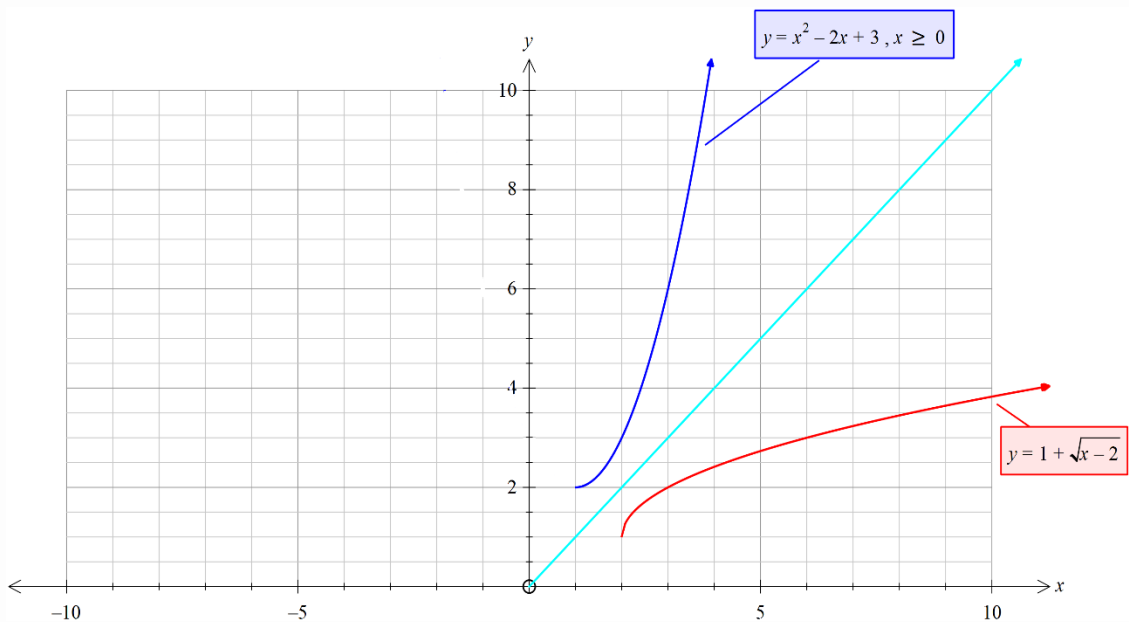
وارون کردن تابع:

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = y - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y - 2}$$

چون $x \geq 1$ پس $x - 1 \geq 0$ پس حالت منفی قابل قبول نیست و داریم:

$$x - 1 = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$$



۱۹. دو تابع $f = \{(2,5), (6,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند.

اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۶)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow (g(2a), 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, g(2a)) \in f$$

$$\Rightarrow f(6) = g(2a) \Rightarrow g(2a) = 3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$



بانک محتوای آموزشی SET

آسان و سریع مطالب مهم را مرور کنید و برای آزمون آماده شوید.

همین الان کلیک کن



دوره‌های آموزشی

با دوره‌های آموزشی وارد مسیر یادگیری شوید و گام به گام خود را در کل درس راحت کنید.



نمونه‌سوال‌ات حل شده

با نمونه سوال‌ات حل شده درس به درس، مثال‌های مهم را ببینید و مفاهیم را آسان درک کنید.



خلاصه نکات

با خلاصه نکات درس به درس فقط به نکات مهم بپردازید و زمان را ذخیره کنید.



ویدئو آموزشی

با ویدئوهای کوتاه درس به درس، مطالب درس را آسان و سریع یاد بگیرید.



www.youtube.com/@saminskill

www.aparat.com/set_ir_official

www.instagram.com/set.ir.shop

t.me/set_ir_levelup

@set_ir_levelup

@levelupset

۰۲۱۴۴۰۷۰۷۳۰

۰۹۰۲۷۱۴۳۴۰۲



اسکن کنید